This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at http://books.google.com/

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.
+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.
+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.
+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

Math. 616

Math. 616

UNIVERSITEITSBIBLIOTHEEK GENT
900000070614

MÉMOIRES

SUR

DIFFÉRENS SUJETS

DE

MATHÉMATIQUES.

Par M. DIDEROT.

Amoto quæramus ſeria ludo. Horat.

A AMSTERDAM.

M. DCC. LXXII.

A MADAME

*DE P****

MADAME,

Je n'opposerai point à vos reproches l'exemple de Rabelais, de Montagne, de la Mothe-le-Vayer, de Swift, & de quelques autres que je pourrois nommer,

qui ont attaqué de la manière la plus cynique les ridicules de leur temps, & conſervé le titre de Sages.

Je veux que le ſcandale ceſſe, & ſans perdre le temps en apologie, j'abandonne la marotte & les grelots, pour ne les reprendre jamais, & je reviens à Socrate.

Sachez cependant qu'entre tous les avantages qu'il vous a plu d'attacher à ce retour, celui de vous en conſacrer les premiers fruits eſt le ſeul

qui m'ait flatté. J'ai pensé qu'ils ne feroient pas indignes du Public, s'ils étoient dignes de vous.

Puissiez-vous donc les agréer, & voir avec indulgence votre nom à la tête d'un Ouvrage, triste à la vérité, mais où l'on traite des sujets qui vous sont familiers, & d'une façon qui ne vous est pas tout-à-fait étrangere.

Ce n'est, MADAME, *ni à votre esprit ni à vos*

charmes ; mais c'eſt ſeulement à vos talens & à vos connoiſſances que je me ſuis propoſé de rendre hommage pour cette fois.

J'ai l'honneur d'être avec un profond reſpect,

MADAME,

Votre très-humble & très-obéiſſant Serviteur,
DIDEROT.

AVERTISSEMENT.

LES Mémoires que je préſente au Public, en très-petit nombre, ſont preſque tous ſur des ſujets intéreſſans. J'ai déſiré de les traiter d'une façon qui fût à la portée de la plupart des Lecteurs; mais après quelques efforts inutiles, il en a fallu venir aux calculs, & il ne m'eſt reſté d'autre

ressource que de placer mes x & mes y, de maniere que ceux qui n'ont aucune connoissance de l'Algebre, pussent les omettre, sans que ni le fil ni la clarté du discours en souffrissent. C'est ce que j'ai exécuté assez heureusement dans le premier Mémoire. La chose étoit impossible dans le second. On peut lire, sans presqu'aucune teinture de Mathématique, le troisieme & le quatrieme. Le cin-

quieme s'eſt trouvé dans le cas du ſecond. Je n'aurois point eu cet Avertiſſement à faire, ſi les Perſonnes entre les mains de qui ce Livre pourra tomber, étoient toutes auſſi inſtruites que celle qui m'a permis de le lui dédier : ſes Ouvrages prouveront inceſſamment, que l'éloge que je fais ici de ſon eſprit & de ſes connoiſſances, eſt dans l'exacte vérité.

TABLE

DES MÉMOIRES.

PREMIER MÉMOIRE.

PRINCIPES généraux de la Science du Son, avec une méthode singuliere de fixer le Son ; de maniere qu'on puisse jouer, en quelque temps & en quelque lieu que ce soit, un morceau de Musique exactement sur le même ton, pag. 1

SECOND MÉMOIRE.

Nouveau Compas fait du Cercle

& de sa développante, avec quelques-uns de ses usages, 169

TROISIEME MÉMOIRE.

Examen d'un Principe de Méchanique sur la tension des cordes; ou maniere de déterminer par le son, si une corde attachée par une de ses extrémités à un point fixe, & tirée de l'autre par un poids, n'est ni plus ni moins tendue, que si l'on substituoit au point fixe un poids égal à celui qui la tend déjà, 227

QUATRIEME MÉMOIRE.

Projet d'un nouvel Orgue sur lequel on peut jouer toute Piece sans savoir de Musique, avec

quelques observations sur les Chronometres, 235

CINQUIEME MÉMOIRE.

Lettre sur la résistance de l'air au mouvement des Pendules, avec l'examen de la Théorie de Newton sur ce sujet, 279

Fin de la Table.

MÉMOIRES
SUR DIFFÉRENS SUJETS
DE
MATHÉMATIQUES.

PREMIER MÉMOIRE.
Principes généraux d'Acoustique.

I.

A NE considérer que les sons ; leur véhicule & la conformation des organes, on croiroit qu'un Adagio de Michel, une Gigue de Corelli, une Ouverture de Rameau,

une Chaconne de Lulli, auroient été il y a deux mille ans comme aujourd'hui, & devroient être au fond de la Tartarie comme à Paris, des Pieces de Musique admirables. Cependant rien de plus contraire à l'expérience. Si nous détestons la Musique des Barbares, les Barbares n'ont gueres de goût pour la nôtre; & en admettant toutes les merveilles qu'on raconte de la Musique des Anciens, il est à présumer que nos plus beaux Concerts auroient été fort insipides pour eux. Mais sans exercer la crédulité du Lecteur, en sortant de notre âge & de notre voisinage; les Italiens ne sont

pas grand cas de la Musique Françoise, & il n'y a pas long-temps que les François avoient un mépris souverain pour la Musique Italienne. Quoi donc, la Musique seroit-elle une de ces choses soumises aux caprices des Peuples, à la diversité des lieux & à la révolution des temps?

On s'accorde cependant en un point; c'est que, tout étant égal d'ailleurs, l'octave, la quinte, la quarte, les tierces & les sixtes employées dans l'harmonie, affectent l'oreille plus agréablement que les septiemes, les secondes, le triton & les autres intervalles que nous appellons

diſſonnans. Cela poſé, je raiſonne ainſi.

Si ce conſentement unanime avoit un fondement réel dans la nature ; ſi en effet tous les ſons n'étoient pas également propres à former des conſonances agréables, pourroit-on regarder la ſucceſſion des ſons & des conſonances, comme arbitraire ?

Quoi, les ſons plairoient à l'oreille en ſe ſuccédant indiſtinctement, tandis qu'il y auroit un choix délicat à faire pour arriver au même but, en les uniſſant. Cela n'eſt pas vraiſemblable.

I I.

Dans toutes les conjonctures où nos ſens ſont intéreſſés, il faut avoir égard à l'objet, à l'état du ſens, à l'image ou à l'impreſſion tranſmiſe à l'eſprit, à la condition de l'eſprit dans le moment qu'il la reçoit & au jugement qu'il en porte.

L'état de l'objet eſt quelquefois indépendant de moi, mais je connoîtrai toujours ſi cet état eſt bon ou mauvais, par l'uſage auquel l'objet eſt deſtiné. L'organe peut être pur ou vicié. L'image ou l'impreſſion ſuit la condition de l'organe. L'eſprit eſt ſujet à des révolutions; &

de-là naît une foule de jugemens divers.

Qui prendrai-je pour guide? A qui m'en rapporterai-je? Eſt-ce à vous? Eſt-ce à moi? C'eſt à celui qui bien inſtruit de la deſtination de l'objet, ne riſque pas de ſe tromper ſur ſa condition; qui a l'organe pur; qui jouit d'un eſprit ſain, & en qui les images des objets ne ſont point défigurées par les ſens.

Je ne m'arrêterai point à l'application de ces principes à la ſcience des ſons; elle eſt trop facile à faire. J'obſerverai ſeulement en général qu'un objet eſt plus ou moins compliqué, ſelon qu'il offre à l'eſprit plus ou moins

de rapports à ſaiſir & à combiner en même-temps, & ſelon que ces rapports ſont plus ou moins éloignés.

Nous démontrerons dans la ſuite que le plaiſir muſical conſiſte dans la perception des rapports des ſons. D'où il s'enſuit évidemment, qu'il ſera d'autant plus difficile de juger d'une Piece de Muſique, qu'elle ſera plus chargée de ces rapports & que ces rapports ſeront plus éloignés.

Quand on ſaura comment l'oreille eſtime les intervalles des ſons, on ne balancera point à prononcer qu'elle appercevra plus facilement le rapport de

deux ſons qui ſont l'un à l'autre comme 1 à 2, que s'ils étoient entr'eux comme 18 à 19. Cela poſé, les rapports d'une ſuite de tons requerroient plus de talent, d'exercice & d'attention pour être apperçus & conſéquemment écoutés avec plaiſir, qu'il n'en faudroit pour chacun de ces rapports pris en particulier. Autre choſe eſt, eſtimer les rapports des ſons qui ſe ſuccedent dans une Piece ; autre choſe, combiner ces rapports entr'eux, les comparer, les diſtinguer tous offerts en même temps dans une harmonie, & conférer les parties ſucceſſives de cette harmonie les unes avec

les autres. Tel peut embraſſer dans ſa tête toutes les parties d'un édifice immenſe ; tel autre ſaiſit à peine le rapport d'une colonne avec ſon piedeſtal.

Si donc la mélodie & l'harmonie multiplient dans un ouvrage les rapports, de ſorte qu'il n'y ait qu'une oreille des mieux exercées qui puiſſe les ſaiſir tous, elle ne ſera goûtée que d'un petit nombre, de ceux qui auront dans l'organe une aptitude, un diſcernement proportionné à la multitude de ces rapports ; & c'eſt ainſi qu'il arrivera que le chant des Barbares ſera trop ſimple pour nous, & le nôtre trop compoſé pour eux.

L'expérience vient à l'appui de mes idées. On nous assure qu'un Paysan, doué d'une oreille délicate, ne put supporter l'ensemble d'un excellent duo de Flûtes dont les parties séparées l'avoient enchanté tour à tour.

La Musique a donc des principes invariables & une théorie. C'est une vérité que les Anciens ont connue. Pythagore posa les premiers fondemens de la science des sons. Il ignora comment l'oreille apprécie les rapports; il se trompa même sur leurs limites, mais il découvrit que leur perception étoit la source du plaisir musical.

Ariſtoxene, ne rencontrant point dans la doctrine de Pythagore les vrais principes de l'harmonie, regarda comme fauſſe une méthode qui n'étoit que défectueuſe, & ſans s'occuper à la rectifier, bannit de la compoſition les nombres & le calcul, & s'en remit à l'oreille ſeule du choix & de la ſucceſſion des conſonances. En ſorte qu'on peut dire que Pythagore ſe trompa en donnant trop à ſes proportions, & Ariſtoxene, en les réduiſant à rien. Si Pythagore, après avoir compris que le plaiſir qui naît de l'harmonie, conſiſte dans la perception des rapports des ſons, eût conſulté l'ex-

périence pour fixer les limites de ces rapports, Ariſtoxene eût été ſatisfait. Celui-ci ne pouſſa point toutefois le ſepticiſme muſical, juſqu'à traiter l'harmonie, de ſcience arbitraire.

III.

La Muſique a le ſon pour objet, & le plaiſir de l'oreille eſt ſa fin. Que le ſon exiſte dans l'air, c'eſt un fait conſtaté par le raiſonnement & par l'expérience. Un corps ſonore ne communique avec nos oreilles, que par l'air qui les environne; où prendrions-nous donc le véhicule du ſon, ſi ce fluide ne l'étoit pas? Car il n'en eſt pas de l'ouïe, comme de l'odorat & de

la vue ; & ce ne ſont pas des molécules échappées du corps ſonore qui viennent frapper nos oreilles. Le ſon d'une cloche renfermée dans la machine pneumatique s'affoiblit à meſure qu'on pompe l'air, & s'éteint quand le récipient eſt vide.

L'air eſt donc le véhicule du ſon. Mais quelle eſt l'altération qui ſurvient dans ce milieu à l'occaſion du corps ſonore ? C'eſt ce que nous allons expoſer. Si vous pincez une corde d'inſtrument, vous y remarquerez un mouvement qui la fait aller & venir avec vîteſſe en delà & en deçà de ſon état de repos, & ce mouvement ſera d'autant plus

ſenſible que la corde ſera plus groſſe. Appliquez votre main ſur une cloche en volée, & vous la ſentirez frémir. La corde vient-elle à ſe détendre, ou la cloche à ſe fendre ? Plus de frémiſſement ; plus de ſon.

L'air n'agit donc ſur nos oreilles qu'en conſéquence de ce frémiſſement : c'eſt donc ce frémiſſement qui le modifie. Mais comment ? Le voici. En vertu des vibrations du corps ſonore, l'air environnant en prend & exerce de ſemblables ſur ſes particules les plus voiſines, celles-ci ſur d'autres qui leur ſont contiguës, & ainſi de ſuite, avec cette différence ſeule, que

l'action des particules les unes ſur les autres eſt d'autant plus grande, que la diſtance au corps ſonore eſt plus petite.

L'air mis en ondulations par le corps ſonore vient frapper le tympan. Le tympan eſt une membrane tendue au fond de l'oreille, comme la peau ſur un tambour; & c'eſt de-là que cette membrane a pris ſon nom. L'air agit ſur elle, & lui communique des pulſations qu'elle tranſmet aux nerfs auditifs. C'eſt ainſi que ſe produit la ſenſation que nous appellons ſon.

Le ſon, par rapport à nous, n'eſt donc autre choſe qu'une ſenſation excitée à l'occaſion des

pulſations ſucceſſives que le tympan reçoit de l'air ondulant qui remplit nos oreilles.

Il ſuit de-là que la propagation du ſon n'eſt pas inſtantanée. Le ſon ne parcourt un eſpace déterminé que dans un temps fini. Mais ce que je regarde comme un des phénomenes de la nature les plus inexplicables, c'eſt que ſon mouvement eſt uniforme. Fort ou foible, grave ou aigu, ſa vîteſſe eſt conſtante. Les viciſſitudes que la différence des lieux & des températures peut cauſer dans la denſité de l'air & la force élaſtique de ſes molécules, augmenteront ou diminueront la

vîteſſe du ſon ; mais ſi l'on trouve qu'il parcourt *m* de pieds dans une ſeconde ; quoique *m* puiſſe varier d'un inſtant à l'autre , il parcourra $2m$ de pieds en 2 ſecondes , $3m$ de pieds en 3 ſecondes , & ainſi de ſuite , juſqu'à ce qu'il ſe faſſe quelque révolution dans l'air.

Si l'on s'en rapporte à Halley & à Flamſteed , le ſon parcourt en Angleterre 1070 pieds de France en une ſeconde de temps. Sur la parole du Pere Merſenne & de Gaſſendi , on aſſuroit, il n'y a pas encore long-temps , que le vent favorable n'accéléroit point le ſon , & qu'il n'étoit point retardé par un vent con-

traire. Mais depuis les expériences de Derham & celles que l'Académie a faites il y a quelques années, cela paſſe pour une erreur.

I V.

Après avoir parlé du ſon en général, il eſt naturel de paſſer aux eſpeces de ſon. Les cauſes nous en indiquent une diſtribution fort ſimple.

Le ſon naît ou des vibrations d'un corps, tel que les cordes & les cloches; ou de la dilatation ſubite d'un air comprimé, tel que le bruit des Fuſils, des Canons, du Tonnerre & des corps agités ou lancés dans l'air; ou

de l'inſpiration dans un inſtrument à vent, tel qu'une Flûte, un Baſſon, un Hautbois, une Trompette.

Les cordes tendues, ſoit de laiton, ſoit à boyaux, frémiſſent, oſcillent, lorſqu'elles ſont frappées. Le coup qu'on leur donne avec une touche ou un archet, les écarte de l'état de repos; elles paſſent & repaſſent en delà & en deçà de la ligne droite, d'un mouvement accéléré qui ne leur permet de s'y fixer, que quand il s'éteint par la réſiſtance qui ralentit peu à peu les vibrations.

Connoiſſant la longueur d'une corde, ſon poids avec celui qui

la tend, on détermine le nombre des vibrations qu'elle fait dans un temps donné. M. Taylor, contemporain de Newton, tenta le premier la ſolution de ce Problême. Ayant à déduire de ſes formules tout ce qui concerne les cordes, je ne peux me diſpenſer d'indiquer la route qu'il faut ſuivre pour les obtenir & les raiſons qu'on a de les regarder comme exactes, quoique la premiere de ſes propoſitions ſoit fauſſe, comme nous aurons en même temps l'occaſion de l'obſerver.

La ſolution de M. Taylor eſt fondée ſur deux faits d'expérience ; l'un que la plus grande

excursion de la corde au-delà de la ligne de repos est fort petite relativement à sa longueur ; & l'autre, que tous ses points parviennent en même temps à la ligne de repos. On peut s'assurer par ses yeux de la premiere de ces suppositons, & consulter les Elémens de Physique de s'Gravesande, & l'Harmonie universelle du Pere Mersenne sur la seconde.

LEMME I.

Si les ordonnées SB, SP, (Fig. 1.) *de deux courbes* AB, AP, *dont l'abscisse est commune, ont entr'elles une raison donnée ; les courbures au sommet des or-*

données seront entr'elles comme les ordonnées, lorsque les ordonnées seront infiniment petites, & les courbes sur le point de coincider avec leur axe AS.

DÉMONSTRATION.

Les ordonnées étant en raison donnée, les tangentes aux points *B* & *P* concourront en un même point *T* de l'axe *AS*. Car menant *Kh* infiniment proche de *SB*, on aura par hypothese *ql. rh* :: *SP. SB*, ou *ql. SP* :: *rh. SB*; & par la similitude des triangles, *ql. SP* :: *qP* ou *SK. ST*, & *rh. SB* :: *rB* ou *SK. St*. Donc *SK. ST* :: *SK. St*. Donc *ST* = *St*.

On a donc $sC . SB :: sc . SP$. Mais par hypotheſe $SB . SP :: sb . sp$. Donc $sC . sc :: sb . sp$, & $sC - sb . sc - sp :: bC . pc :: SB . SP$.

Soient maintenant les ordonnées sb, SB infiniment proches; bC & pc pourront être regardées comme la meſure des angles de contact, lorſque SB & SP décroiſſant à l'infini, les courbes ſeront ſur le point de coincider avec l'axe As. Car dans ce cas Bb ſe rectifiant, devient égale à Pp; de plus, les angles de contact ſont entre eux comme $\frac{bC}{Bb}$ à $\frac{pc}{Pp}$.

Car (*Fig.* 2.) l'angle APB eſt à l'angle BPC ou EPF,

comme AB à BC ou comme $\frac{AB}{AP}$ à $\frac{BC}{AP}$. Mais $\frac{BC}{AP} = \frac{EF}{EP}$. Donc l'angle APB eſt à l'angle EPF comme $\frac{AB}{AP}$ à $\frac{EF}{EP}$.

Donc les courbures en B & P (*Fig.* 1.) étant proportionnelles aux angles de contact, ſeront ici comme $\frac{bC}{Bb}$ à $\frac{pc}{Pp}$. C'eſt-à-dire, à cauſe de $Bb = Pp$, comme bC à pc, ou comme SB à SP. Ce qu'il falloit démontrer.

Lemme II.

La force accélératrice d'un point quelconque P, (Fig. 3.) *d'un fil élaſtique tendu & d'une groſſeur uniforme, eſt dans ſes petites vibrations, comme la courbure du fil en ce point.*

DÉMONS-

DÉMONSTRATION.

Suppoſez que le fil élaſtique *AC* prenne dans une de ſes vibrations, la figure *APC* infiniment proche de l'axe *AC*. Le fil étant également tendu dans toute ſa longueur *AC* par le poids *G*, la tenſion ſera à peu près la même, à tous les points de la courbe *APC*.

Soit *p* infiniment proche de *P*. Tirez les tangentes *Pt*, *pt*. Achevez le parallélogramme *pt Pr*. Abaiſſez les perpendiculaires *PO*, *pO* ſur les tangentes. Suppoſons maintenant que les forces égales qui tirent en ſens contraire le petit arc *Pp*, ſoient

exprimées par les tangentes *tP*, *tp*. Décompoſez ces forces en deux autres *pz*, *PZ* & *tZ*, *pZ*. Les forces égales & directement oppoſées *pZ*, *PZ* ſe détruiſent. Le petit arc *Pp* n'eſt donc animé que des deux forces conjointes *tZ*, c'eſt-à-dire de la force *tr* dans la direction *tr* ou *PO*. La force motrice de cet arc dans la direction *tr* eſt donc à la tenſion du fil en *P* comme *tr* à *tP*. Mais *Pp* pouvant paſſer pour un arc de cercle décrit du centre *O*, on a par la nature du cercle, l'angle *tPr* = l'angle *POp*. Donc les triangles iſoceles *tPr* & *POp* ſont ſemblables. Donc *Pp*. *PO* : : *tr*. *tP*.

Donc la force motrice qui anime Pp dans la direction tr, eſt à la tenſion du fil donnée G, comme Pp à PO. Or G eſt conſtante; donc cette force motrice ſera comme $\frac{Pp}{PO}$. Mais la force accélératrice eſt toujours en raiſon compoſée de la directe de la force motrice & de l'inverſe de la matiere à mouvoir. La matiere à mouvoir eſt ici comme Pp, à cauſe de la groſſeur uniforme du fil. Donc la force accélératrice eſt comme $\frac{1}{PO}$, ou en raiſon inverſe du rayon oſculateur, ou de la courbure au point P. Ce q. f. d.

Après avoir établi ces Lemmes,

M. Taylor prétend, que ſi une corde *A C* (*Fig.* 4.) d'une groſſeur uniforme & tendue par le poids *G* oſcille, de maniere que ſon plus grand écart de la ligne de repos *A C*, ſoit preſqu'inſenſible, & conſéquemment que ſon accroiſſement en longueur, dans ſa plus grande vibration, ne cauſe aucune inégalité dans la tenſion, & qu'on puiſſe négliger ſans erreur l'inclinaiſon des rayons oſculateurs ſur l'axe; il prétend, dis-je, que la nature de la courbe *A Q P C* ſera telle, qu'ayant tiré deux ordonnées quelconques *Q R*, *P S*, la courbure en *R* ſera à la courbure en *P* comme *Q R* à *P S*.

Mais il eſt conſtant que la corde peut prendre une infinité d'autres figures que celle que cet Auteur lui aſſigne, & que tous ſes points peuvent arriver à la fois à ligne droite dans une infinité d'autres cas où elle n'a point cette figure. On déduit d'un Mémoire que M. d'Alembert a envoyé à l'Académie de Berlin, ſur les cordes vibrantes, qu'en nommant a l'eſpace qu'un corps peſant parcourt en deſcendant librement pendant un temps donné θ, m le rapport de la force tendante au poids de la corde, l la longueur de la corde, entendant par ce mot la longueur d'une partie inter-

ceptée entre deux chevalets, & ſuppoſant que la courbe n'a point de ventres ni de nœuds, on déduit, dis-je, que le temps d'une vibration eſt $= \frac{2\theta\sqrt{l}}{\sqrt{2am}}$, quelque figure que la corde prenne.

Mais la propoſition de M. Taylor deviendra vraie, ſi on la rend conditionnelle, & ſi on l'énonce de la maniere ſuivante.

PROPOSITION I.

Si la nature de la courbe APQL, (Fig. 4.) *eſt telle qu'ayant tiré deux ordonnées quelconques* QR, PS, *la courbure en* Q *ſoit à la courbure en* P, *comme* QP *à* PS, *je dis que tous les points de cette courbe arriveront en même temps à la ligne droite.*

DÉMONSTRATION.

Puiſque par hypotheſe, la courbure en *P* eſt à la courbure en *Q* comme *PS* à *QR*; donc par le Lemme 2, la force accélératrice en *P* eſt à la force accélératrice en *Q*, comme *PS* à *QR*; donc les eſpaces parcourus en temps égaux *Pp*, *Qq*, ſont entr'eux comme *PS* à *QR*, ou *ſub-trahendo*, comme *pS* à *qR*. Donc *pS* & *qR* ſont dans la raiſon donnée de *PS* à *QR*; donc, Lemme 1, les courbures en *p* & *q*; & Lemme 2, les forces accélératrices en ces points, & par conſéquent les eſpaces parcourus *pm*, *qn*,

ſont entr'eux comme *pS* à *qR*, ou *ſub-trahendo*, comme *mS* à *nR*; donc en continuant le même raiſonnement, les forces accélératrices ſont toujours comme les eſpaces qui reſtent à parcourir; donc, pag. 31. Cor. 1. Liv. 1. Princip. Math. les points *P* & *Q* arriveront en même temps à la ligne de repos. Ce q. f. d.

PROPOSITION II.

Les axes AC *&* BD *étant donnés, décrire la courbe muſicale de Taylor.*

SOLUTION.

Tracez (*Fig.* 6.) la développante *Eeg* du quart de cercle

BNE. Tirez les tangentes *Bg*, *Ne*. Prenez $Mh = Ne$ & $hF = Bg$. Faites *hi* égale & parallele à *DC*, c'est-à-dire, à la moitié de la corde. Achevez le triangle *Fhi*. Je dis que le point *P* où la ligne *Fi* coupe la perpendiculaire *MP*, appartient à la courbe musicale.

DÉMONSTRATION.

Soit (Fig. 5.) $BD = a$, $AC = l$, $BM = x$, $PM = y$, l'arc $BP = s$, & le rayon osculateur en $B = r$. En faisant *Pp* constante, les formules donnent pour le rayon osculateur en *P* ou pour *PO*, $-\frac{ds\,dx}{ddy}$.

On a donc par la nature de

la courbe $a. a - x :: - \frac{dsdx}{ddy}. r.$ Donc $raddy = xdxds - adxds$. Intégrant & ajoutant la constante Qds, il vient $rady = \frac{1}{2} xxds - axds + Qds$. Mais en supposant $x = o$, on voit que $dy = ds$. Donc $Q = ra$. Donc l'équation $rady = \overline{ra + \frac{xx}{2} - ax}\, ds$ exprime la nature de la courbe.

Soit $ax - \frac{1}{2}xx = zz$, on aura $rady = \overline{ra - zz}\, ds$; & $rraady^2 = \overline{ra - zz}^2 \times ds^2$. Mais $ds^2 = dx^2 + dy^2$. Ce qui donne $\overline{2razz - z^4}\, dy^2 = \overline{ra - zz}^2\, dx^2$. Mais la courbe ABC se confondant presque avec l'axe AC par hypothese; la quantité zz = presque o relativement à ra; car r est très-

grande par rapport à a & x. L'équation ſe transforme donç en $2razzdy^2 = rraadx^2$. D'où l'on tire $dy = \frac{r^{\frac{1}{2}} a^{\frac{1}{2}} dx}{\sqrt{2ax - xx}} = \frac{r^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}} \times \frac{adx}{\sqrt{2ax - xx}}$.

Soit une ordonnée mn infiniment proche de MN, & Nt parallele à BD. Par la nature du cercle $MN. ND :: Nt. Nn$, ou $\sqrt{2ax - xx}. a :: dx. Nn = \frac{adx}{\sqrt{2ax - xx}}$. On a donc $dy = Nn \times \sqrt{\frac{r}{a}}$, & intégrant $y = BN \times \sqrt{\frac{r}{a}}$, à quoi il ne faut ni ajouter, ni ôter ; car faiſant $y = o$, BN devient auſſi o.

Mais lorſque $PM = CD$, ou

$y = \frac{l}{2}$; alors $BN = BNE$, & par conséquent $\frac{l}{2} = BNE \times \sqrt{\frac{r}{a}}$ ou $\sqrt{\frac{r}{a}} = \frac{\frac{1}{2}l}{BNE}$. Donc en tout point de la courbe, substitution faite, on aura $y = \frac{BN \times \frac{1}{2}l}{BNE}$ ou $y. \frac{1}{2}l :: BN. BNE$.

Mais (*Fig.* 6.) $Fh = BNE$, $MF = BN$, $hi = DC = \frac{1}{2}l$. Donc $MP = y$. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

PS étant à BD comme r à PO, on aura $PO \times PS = ar$. Soit 1 à c comme le diametre à la circonférence, & par conséquent $a. BNE :: 1. \frac{1}{2}c$, ou

$BNE = \frac{1}{2} ac$. Et puiſque $\sqrt{\frac{r}{a}} = \frac{\frac{1}{2}l}{BNE}$; $\sqrt{\frac{r}{a}} = \frac{l}{ac}$, & $\frac{r}{a} = \frac{ll}{aacc}$ ou $r = \frac{ll}{acc}$ & $PO \times PS = \frac{ll}{cc}$.

PROPOSITION III.

Soit le rapport du diametre à la circonférence $= \frac{1}{c}$, *la longueur d'une corde d'inſtrument uniformément épaiſſe* $= 1$, *ſon poids* $= P$; *le poids qui la tend* $= G$, *& la longueur d'un pendule qui ſe meut dans une cycloïde* $= D$.

Je dis que le temps d'une vibration de la corde ſera au temps d'une oſcillation du pendule, en raiſon ſous-doublée de Pl *à* $ccDG$, *& le nombre des vibrations de la corde dans le temps d'une oſcillation du pendule* $= \frac{c\sqrt{DG}}{Pl}$.

DÉMONSTRATION.

Premiere partie. Soit la force dont la particule Pp eſt preſſée au lieu $P = A$; ſon poids $= B$. On a, Lemme 2, $A . G :: Pp . PO$, & à cauſe de l'uniformité d'épaiſſeur, $P . B :: l . Pp$, & *conjungendo* $P \times A . B \times G :: l . PO$, ou $A . B :: G \times l . PO \times P$.

Maintenant ſi la particule Pp oſcilloit dans une cycloïde dont le périmetre entier fût égal à $2 PS$, en vertu d'une force motrice ou d'un poids A; le temps d'une de ſes oſcillations dans la cycloïde feroit égal au temps d'une de ſes vibrations ſur la corde; car la force accéléra-

trice de la particule dans la cycloïde décroît en raison de la distance au point le plus bas, de même que dans la corde en raison de la distance au point *S*; & d'ailleurs la force motrice de la particule dans la cycloïde seroit à son point le plus haut, *A* ou telle qu'on l'a supposée à la même particule sur la corde. *Voyez* le Corollaire de la proposition cinquante & unieme du Livre premier de Newton.

Mais si l'élément *Pp*, au lieu de se mouvoir dans une cycloïde dont le périmetre seroit égal à 2 *PS* & la force motrice seroit *A*, oscilloit dans une cycloïde dont le périmetre fût 2 *D*,

en vertu de ſon poids *B*; par une propriété de la cycloïde, démontrée corollaire de la propoſition cinquantieme du Livre premier des Principes Mathématiques de Newton ; la longueur de ce ſecond pendule ſeroit $= D$. Or par la propoſition vingt-quatrieme du même Auteur, Liv. 2, les quantités de matiere ſuſpendues étant égales, le temps d'une oſcillation d'un pendule, dont la longueur eſt *D*, & dont la force motrice en commençant eſt *B*, eſt au temps d'une oſcillation d'un pendule, dont la longueur eſt *PS* & la force motrice *A*, en raiſon compoſée de la ſous-doublée de la longueur *D*

à la longueur *P S*, & de la ſous-doublée de la force *A* au poids *B*. Mais le temps d'une vibration de l'élément *P p* animé ſur la corde, d'une force *A*, eſt égal au temps d'une oſcillation de cet élément dans une cycloïde dont le périmetre feroit 2 *P S*, & partant *P S* la longueur du pendule mû en vertu de la même force *A*, comme nous avons vu.

Donc le temps d'une vibration de la corde ou de la particule *Pp* animée de la force *A*, eſt au temps d'une oſcillation d'un pendule, dont la longueur eſt *D* & dont la force motrice en commençant eſt *B*, en raiſon composée de la ſous-doublée de la

longueur PS à la longueur D & de la ſous-doublée du poids B à la force A. C'eſt-à-dire, en raiſon ſous-doublée de la quantité $PO \times PS \times P$ à la quantité GlD; & à cauſe de $PO \times PS = \frac{ll}{cc}$ en raiſon ſous-doublée de Pl à $ccDG$.

Il ne me reſte plus à trouver que le nombre des vibrations iſochrones que la corde fait pendant une oſcillation du pendule. C'eſt la ſeconde partie de la démonſtration.

Seconde partie. Soit ce nombre $= n$. Soit T le temps d'une vibration de la corde. t le temps d'une oſcillation du pendule. Le temps d'une vibration de la corde

pris autant de fois qu'elle fait de vibrations pendant une oscillation du pendule, doit être égal au temps d'une seule oscillation du pendule ; c'est-à-dire, que $nT = t$, ou $n.1 :: t.T$. Mais $t.T :: \sqrt{ccDG}.\sqrt{Pl}$. Donc $n.1 :: \sqrt{ccDG}.\sqrt{Pl}$. Donc $n = c\sqrt{\frac{GD}{Pl}}$. Ce q. f. d.

COROLLAIRE I.

Si l'on compare deux cordes différentes entr'elles ; *C* & *D* étant des quantités constantes, les nombres de vibrations faites dans un temps donné, seront comme $\sqrt{\frac{G}{Pl}}$; mais les nombres de vibrations faites dans un

temps donné, étant d'autant plus grands que le temps d'une feule vibration eft petit, on a $\sqrt{\frac{G}{PL}} . \sqrt{\frac{g}{pl}} :: t . T.$ ou $T . t. :: \sqrt{\frac{PL}{G}} . \sqrt{\frac{pl}{g}}$, ou les temps des vibrations comme $\sqrt{\frac{PL}{G}}$.

COROLLAIRE II.

Le Pendule dont la longueur D eft de trois pieds, huit lignes $\frac{1}{2}$, ou de $\frac{881}{24}$ pouces, fait une ofcillation à chaque feconde, & 1 eft à c comme 113 à 355. Subftituant ces valeurs dans la formule $c\sqrt{\frac{GD}{PL}}$, on trouve le nombre des vibrations d'une corde dans une feconde, à peu près

comme $\frac{355}{113} \sqrt{\frac{881\,G}{24\,PL}} = 19.0341 \sqrt{\frac{G}{PL}}$.

Remarque I.

On n'entend dans tout ce calcul, par la longueur & le poids de la corde, que la longueur & le poids de la partie interceptée entre deux chevalets & qu'on fait résonner ; c'est à l'aide de ces chevalets qu'on empêche la corde entiere de frémir.

Remarque II.

Quoique les formules de M. Taylord ne paroissent pas d'abord applicables à tous les cas, mais seulement à celui où la

corde vibrante prend une certaine figure ; elles ſont cependant bonnes pour tous ceux où les points de la corde arrivent en même temps à la ligne de repos.

Car ſoit (*Fig.* 7.) une corde *AB*, fixe par ſes deux extrémités en *A* & en *B* : ſi l'on imprime perpendiculairement à chaque point de cette corde une certaine vîteſſe, il eſt évident que cette corde miſe en mouvement fera des vibrations. Si les vîteſſes imprimées à chaque point ſont telles que tous les points arrivent en même temps à la ligne droite *AB*, en faiſant leurs vibrations ; alors le temps de ces

vibrations ſera le même, quelle que ſoit la vîteſſe primitive imprimée à chaque point. Ainſi, ſoit que la corde doive prendre la figure donnée par Taylor, ſoit qu'elle en doive prendre une autre, le temps de ſes vibrations ſera toujours le même, & par conſéquent elle fera entendre le même ſon. Nous nous contentons d'énoncer ces Propoſitions, dont la démonſtration rigoureuſe eſt difficile & nous meneroit trop loin.

Il en ſeroit de même ſi la corde avoit d'abord une figure *ABC* qu'elle eût été obligée de prendre par l'action de quelques puiſſances. Car il eſt évident

que relâchant ſubitement cette corde, elle fera des vibrations autour des points *A* & *B*; & que ſi tous ſes points doivent arriver en même temps à la ligne droite *AB*, ſa figure ne fait rien à la durée de ſes vibrations ni par conſéquent au ſon qu'elle produit, du moins relativement à ſon degré du grave à l'aigu; quant à ſa véhémence & à ſon uniformité, ce pourroit être autre choſe.

Mais il eſt d'expérience, qu'une corde qui a été frappée par un archet, prend en aſſez peu de temps une figure telle que tous ſes points arrivent en même temps à la ligne de repos. Ainſi les

les formules de Taylor peuvent être regardées comme générales & comme exprimant aſſez exactement le nombre des vibrations des cordes.

Cependant on trouve que, ſi l'on éloigne une corde de ſon point de repos en la touchant par ſon milieu, & que ſes deux parties conſervent toujours dans leurs vibrations la figure mixtiligne, ces vibrations ſeront de plus longue durée, que ſi on frappoit la corde en un autre point; ce qui donne lieu de croire que ce n'eſt qu'après un certain nombre de vibrations, que la corde acquiert une figure telle que tous ſes points arrivent

en même temps à la ligne droite, & que ses premieres vibrations sont d'autant plus courtes qu'on la frappe plus loin de son milieu. C'est apparemment pour cette raison qu'une corde de violon, que l'on touche à vide près du chevalet, rend un son plus aigu que si on la touche par son milieu.

Il en est de même si le coup dont on la frappe n'est pas appliqué avec une certaine modération. Le coup d'archet est-il violent, & l'écart de la ligne de repos devient-il sensible, les vibrations cessent d'être isochrones & se font en commençant un peu plus vîte que dans la suite.

Il en eſt encore en cela des vibrations des cordes, comme des oſcillations d'un pendule qui ne ſont iſochrones que lorſqu'elles ſont fort petites.

Il eſt inutile d'inſiſter ſur les variétés que les ſuppoſitions qu'on peut faire, introduiſent dans les formules précédentes. Il eſt évident que le nombre des vibrations d'une corde étant dans un temps donné comme la racine quarrée du poids qui la tend, diviſé par le produit fait du poids de la corde & de ſa longueur; ſi deux cordes ſont de même longueur, les nombres de leurs vibrations dans un temps donné, ſeront comme les racines quar-

rées des poids qui les tendent divisés par les poids des cordes, & ainsi des autres hypotheses.

V.

Les vibrations d'une corde produisent des ondulations dans l'air. L'air agite le tympan. Le tympan transmet son frémissement aux nerfs auditifs ; & les nerfs auditifs ne font peut-être que répéter les vibrations de la corde. Cela supposé, l'oreille est un vrai tambour de Basque. Le tympan représente la peau. Les nerfs auditifs répondent à la corde qui traverse la base ; & l'air fait l'office des baguettes ou des doigts.

Quoi qu'il en ſoit, il eſt certain que la célérité plus ou moins grande des vibrations diſtingue les ſons en graves & en aigus. Un ſon eſt d'autant plus grave, que le nombre des vibrations qui frappent l'oreille dans un temps donné eſt petit. Un ſon eſt d'autant plus aigu que le nombre des vibrations eſt plus grand dans le même temps. Ceci eſt d'expérience. Attachez ſucceſſivement différens poids à la même corde; vous en tirerez des ſons d'autant plus aigus que les poids ſeront plus grands. Or il eſt évident que plus les poids ſont grands, plus les vibrations ſont promptes.

Nous avons donc une façon d'exprimer les rapports des ſons du grave à l'aigu. Il ne s'agit que de les conſidérer comme des quantités dont les nombres des vibrations produites dans un temps donné ſont les meſures ; car la longueur d'une corde, ſa groſſeur, & le poids qui la tend, étant donnés, on a par les propoſitions précédentes l'expreſſion en nombre, des vibrations produites dans un temps limité.

Voici donc ce que l'on entend préciſément en Muſique par une octave, une ſeconde, une tierce, une quarte, &c. Si vous pincez une corde, & qu'elle

faſſe un certain nombre de vibrations dans un temps donné, 4 vibrations par exemple; trouvez moyen, ſoit en la raccourciſſant, ſoit en la tendant d'un plus grand poids, de lui faire produire 8 vibrations dans le même temps donné, & vous aurez un ſon qui ſera, ce qu'on appelle, à l'octave du premier.

Si vous pincez une corde, & qu'elle faſſe deux vibrations dans un temps donné, trouvez moyen, ſoit en la raccourciſſant, ſoit en la tendant d'un plus grand poids, de lui faire produire 3 vibrations dans le même temps, & vous aurez l'intervalle du

grave à l'aigu, que les Muficiens appellent une quinte.

Or les formules précédentes donneront toujours de combien la corde doit être raccourcie, ou tendue de plus qu'elle ne l'étoit.

Mais il y a des mefures à garder avec nos fens, un tempérament à obferver dans les chofes qu'on leur préfente. Ils ne peuvent embraffer un objet trop étendu. Un trop petit leur échappe. Tous les fons fenfibles font renfermés dans des limites au-delà defquels, ou trop graves ou trop aigus, ils deviennent inappréciables à l'oreille. Or on peut en quelque

façon fixer ces limites. C'eſt ce que M. Euler a exécuté ; & ſelon ſes expériences & ſon calcul, tous les ſons ſenſibles ſont compris en 30 & 7552, intervalle qui renferme huit octaves. C'eſt-à-dire que, ſelon ce ſavant Auteur, le ſon le plus grave appréciable à notre oreille, fait 30 vibrations par ſeconde, & le plus aigu, 7552 vibrations dans le même temps donné.

Un intervalle en général eſt la meſure de la différence de deux ſons, dont l'un eſt grave & l'autre aigu.

Soient trois ſons *a*, *b*, *c* ; *a* eſt le plus grave ; *c* le plus aigu ;

b eſt moyen entre *a* & *c*. Il eſt évident par la définition précédente, que l'intervalle de *a* à *c* eſt fait des intervalles de *a* à *b* & de *b* à *c*.

Si l'intervalle de *a* à *b* eſt égal à l'intervalle de *b* à *c*; ce qui arrive toutes les fois que *a*. *b* : : *b*. *c*. Alors l'intervalle de *a* à *c*, ſera double de l'intervalle de *a* à *b*.

D'où il s'enſuit que les intervalles doivent être exprimés par les valeurs des rapports que les ſons ont entr'eux. Ainſi l'intervalle de *a* à *b*, doit être exprimé par $\frac{b}{a}$, celui de *b* à *c*, par $\frac{c}{b}$; ou ce qui eſt encore plus commode,

on représentera le 1er par log. b—log. a, & le second par log. c—log. b; & faisant $a=2$, & $b=3$, on aura pour l'expression de l'intervalle que les Musiciens appellent une quinte, $l3 - l2$. D'où l'on voit que, l'expression de l'octave étant $l2 - l1$, l'octave & la quinte sont des intervalles incommensurables entre eux; en sorte qu'il n'y a aucun intervalle, quelque petit qu'il soit, qui les mesure exactement l'un & l'autre; ou aucune aliquote commune entre $l\frac{2}{1}$ & $l\frac{3}{2}$. Car il n'y a aucune puissance x entiere ou fractionnaire qui soit telle que $\frac{3^x}{2} = 2$. En effet, soit

$x = \frac{m}{n}$. Donc $\frac{3^m}{2} = 2^n$. Ce qui est impossible.

Il en sera de même de tous les intervalles qui seront exprimés par des logarithmes qui différeront entr'eux comme $l\frac{3}{2}$ & $l\frac{5}{4}$.

Au contraire, on pourra comparer les intervalles qui seront exprimés par des logarithmes de nombres qui seront des puissances d'une même racine. Ainsi l'intervalle $\frac{27}{8}$ est à l'intervalle $\frac{9}{4}$ comme 3 à 2. Car le premier est $3\,l\frac{3}{2}$, & le second est $2\,l\frac{3}{2}$.

On a par la même voie que nous venons de suivre, la facilité d'ôter un intervalle d'un autre, & de connoître l'intervalle

restant. Si on demande, par exemple, quel est l'intervalle restant, après qu'on a ôté la quinte de l'octave; j'ôte $l3 - l2$ de $l2$, & j'ai $2l2 - l3$. Mais $2l2 = l4$. Donc $2l2 - l3 = l4 - l3$, ou $l\frac{4}{3}$, ou $\frac{4}{3}$, expression de l'intervalle connu sous le nom de quarte.

Lorsque les intervalles sont incommensurables, on peut à l'aide des logarithmes avoir en nombres leur rapport approché. Ainsi $l2 = 0.3010300$ & $l3 - l2 = 0.1760913$. L'intervalle de l'octave est donc à l'intervalle de la quinte comme 3010300 à 1760913.

REMARQUE.

Pour abaisser cette fraction & avoir des rapports, de plus en plus approchés de celui qu'on cherche, il faut diviser 301300 par 1760913. Il vient pour quotient un entier plus un reste. Soit cet entier $= q$ & le reste $= \frac{m}{n}$.

Transformez $\frac{m}{n}$ en $\frac{1}{\frac{n}{m}}$; & le quotient trouvé sera $q + \frac{1}{\frac{n}{m}}$. Soit le quotient de $\frac{n}{m} = r + \frac{s}{t}$, le quotient trouvé sera donc transformé derechef en $q + \frac{1}{r + \frac{s}{t}}$.

Changez la fraction $\frac{s}{t}$ en $\frac{1}{\frac{t}{s}}$, &

vous transformerez encore le premier quotient en $q + \cfrac{1}{r + \cfrac{1}{t + \cfrac{1}{s}}}$,

& ainſi de ſuite.

Il eſt évident qu'à chaque transformation, on aura un nouveau rapport, plus approché du vrai que le rapport qui l'aura précédé.

Voici maintenant la maniere de diviſer un intervalle quelconque en parties égales. Prenez le logarithme de cet intervalle; diviſez-le en tant de parties que l'on voudra. Cherchez enſuite dans la table le nombre qui correſpondra à l'une de ces parties. Il eſt évident que ce nombre

aura à l'unité le rapport cherché. Ainſi ſoit demandé un intervalle trois fois moindre que l'octave. Je cherche le logarithme de 2. J'en prends la troiſieme partie. Je regarde dans la table le nombre correſpondant à cette troiſieme partie, & il exprime par ſon rapport à l'unité, l'intervalle demandé.

REMARQUE.

Mais on pourroit chercher pourquoi j'exprime indifférement un intervalle par $\frac{b}{a}$ ou par log. b — log. a, ces quantités n'étant pas les mêmes.

En voici la raiſon. $\frac{b}{a}$ exprime

proprement le rapport des nombres de vibrations qui conſtituent les ſons ; mais log. *b* — log. *a*, peut être regardé comme exprimant les intervalles, puiſque ſi l'on fait gliſſer un chevalet ſous une corde, tandis qu'à l'aide d'un archet on en tirera un ſon non interrompu, on entendra ce ſon croiſſant, pour ainſi dire, uniformément depuis le degré le plus grave ou le ſon de la corde entiere juſqu'à ſon octave & par-delà.

Du reſte il n'y auroit pas d'inconvénient à ne prendre ces expreſſions logarithmiques que comme une hypotheſe. Il n'y a pas même d'apparence que M.

Euler qui nous les propoſe, prétende les faire valoir davantage. Car on ne peut gueres calculer ou comparer les ſons en tant que ſenſations. Les longueurs des cordes & les nombres des vibrations qui les conſtituent, ſont les ſeules choſes comparables. Mais pour repréſenter les intervalles par des logarithmes, il faudroit, par exemple, qu'en entonnant une tierce majeure, l'excès de la ſenſation du dernier ſon ſur la ſenſation du ſecond, fût double de l'excès de la ſenſation de celui-ci ſur le premier. Mais qu'eſt-ce que cela ſignifie ? & quand cela auroit un ſens bien précis, qui ſait s'il eſt vrai ?

V I.

La diſtinction des ſons en graves & en aigus n'eſt pas la ſeule qu'on puiſſe faire. On les conſidere encore comme forts & foibles. La force du ſon varie ſelon la diſtance au corps ſonore. Il en eſt du ſon comme de la lumiere, & en général de tout ce qui émane d'un point conſidéré comme centre. Plus la diſtance à laquelle le ſon eſt parvenu eſt grande, plus il s'eſt affoibli ; & cet affoibliſſement ſuit ordinairement la raiſon des quarrés des diſtances ; c'eſt-à-dire, qu'à une diſtance double il eſt quatre fois plus foible ;

neuf fois à une diſtance triple, ſeize fois à une diſtance quadruple, & ainſi de ſuite; en ſuppoſant toutefois que ſa propagation eſt libre; car ſi le ſon eſt dirigé de quelque côté par des cauſes particulieres, à l'Orient, par exemple, lorſqu'il tend naturellement à ſe propager vers le Midi; la regle n'a plus lieu.

Si le ſon ſe répand & s'affoiblit comme la lumiere, il ſe réfléchit auſſi comme elle, & il peut arriver qu'à la rencontre d'une ſurface dure & polie, pluſieurs fibres ſonores ſe réuniſſent dans un même lieu. Lorſque l'on ſe trouvera dans quelques-unes

de ces chambres artificielles aux angles deſquelles des perſonnes parlent bas & s'entendent, malgré l'intervalle qui les ſépare ; on n'aura qu'à lever les yeux au plafond, & l'on appercevra dans ſa figure elliptique la raiſon de ce phénomene.

Il eſt démontré que, ſi des foyers d'une ellipſe, on tire deux lignes qui ſe coupent en un point quelconque de cette courbe, ces lignes feront ſur la tangente en ce point, deux angles égaux. C'eſt-à-dire, qu'en conſidérant l'un comme angle d'incidence, l'autre ſera l'angle de réflexion. Or les plafonds de ces chambres ſont des ellipſes dont les inter-

locuteurs occupent les foyers & où les fibres ſonores qui partent de leurs bouches achevent la figure 25, planche 4, des ſections coniques du Marquis de l'Hôpital.

Les excurſions d'une corde au-delà de la ligne de repos peuvent être plus ou moins grandes, ſans augmenter ni diminuer en nombre dans un temps donné, c'eſt-là ce qui rend le ſon plus ou moins fort, ſans changer ſon rapport à un autre ſon plus ou moins grave.

Il y a donc trois choſes à conſidérer dans les vibrations, leur étendue qui fait l'intenſité ou la véhémence du ſon ; leur

nombre qui le rend plus ou moins aigu, & leur iſochroniſme d'où dépend ſon uniformité.

J'entends par un ſon uniforme, celui qui eſt pendant toute ſa durée également grave ou aigu. Si l'on veut qu'un ſon ſoit uniforme, ou garde en s'éteignant le même rapport à un ſon donné, que celui qu'il avoit en commençant, il faut que les vibrations qui fixent ſon degré, ſoient iſochrones ; & pour cet effet, la corde doit être ſuffiſamment tendue, & le coup dont elle eſt frappée, modéré. Sans ces deux conditions, elle s'écartera ſenſiblement de la ligne de repos ; ſes premieres vibrations

ſeront plus promptes que les ſuivantes ; auſſi-tôt le ſon ne ſera plus uniforme, & l'oreille ſe révoltera.

Le chagrin de l'organe naît de ce que le défaut d'iſochroniſme dans les vibrations, rendant le rapport d'un ſon variable, il ne ſait en quelle raiſon ce ſon qui le frappe eſt à celui qui le précede, l'accompagne ou le ſuit. Ce qui démontre que le plaiſir muſical conſiſte dans la perception des rapports des ſons.

REMARQUE.

Mais cette origine n'eſt pas particuliere au plaiſir muſical.

Le

Le plaiſir en général conſiſte dans la perception des rapports ; ce principe a lieu en Poéſie, en Peinture, en Architecture, en Morale, dans tous les Arts & dans toutes les Sciences. Une belle machine, un beau tableau, un beau portique, ne nous plaiſent que par les rapports que nous y remarquons ; ne peut-on pas même dire, qu'il en eſt en cela d'une belle vue comme d'un beau concert. La perception des rapports eſt l'unique fondement de notre admiration & de nos plaiſirs ; & c'eſt de-là qu'il faut partir pour expliquer les phénomenes les plus délicats qui nous ſont offerts par les

Sciences & les Arts. Les choses qui nous paroissent les plus arbitraires, ont été suggérées par les rapports; & ce principe doit servir de base à un essai philosophique sur le goût, s'il se trouve jamais quelqu'un assez instruit pour en faire une application générale à tout ce qu'il embrasse.

Mais si vous admettez une fois que le plaisir consiste dans la perception des rapports; vous serez contraint de faire un pas de plus, & de convenir que le plaisir doit varier avec les rapports, & que les rapports les plus simples se saisissant avec plus de facilité que les autres,

doivent auſſi plaire plus généralement. Or de tous les rapports, le plus ſimple, c'eſt celui d'égalité ; il étoit donc naturel que l'eſprit humain cherchât à l'introduire par-tout où il pouvoit avoir lieu. Auſſi cela eſt il arrivé. C'eſt par cette raiſon qu'on fait les ailes d'un bâtiment égales, & les côtés d'une fenêtre paralleles. Si la raiſon d'utilité demande qu'on s'en écarte, on lui obéit ; mais c'eſt comme à regret, & l'Artiſte ne manque jamais de revenir au rapport d'égalité dont il s'étoit écarté. Ce retour que l'on attribue vulgairement à l'inſtinct, au caprice, à la fantaiſie, n'eſt autre

chofe qu'un hommage rendu aux attraits naturels de l'harmonie & des rapports ; & c'eſt à lui que nous ſommes redevables d'une infinité de petits ornemens minutieux que l'on traite tous les jours d'arbitraires, & qui ne ſont rien moins. La ſeule Architecture m'en fourniroit mille exemples ; mais ils ſeroient ici déplacés.

Je me contenterai d'appliquer mes idées à une obſervation que ceux qui ont quelqu'habitude d'entendre ou de lire de la Muſique auront faite ; c'eſt qu'ordinairement les ſons aigus tiennent moins que les graves. Les deſſus ſe précipitent, tandis que les

baſſes vont lentement, à moins que le ſujet n'exige qu'elles doublent le pas. Croit-on que ce ſoit ſans raiſon que les Muſiciens aient pratiqué de cette maniere, & que leur caprice eſt la ſeule regle qu'ils aient ſuivie. Si on le croit, on ſe trompe.

Ils étoient ſecrettement guidés par la perception des rapports: s'ils ont permis aux ſons aigus de courir, & s'ils ont arrêté les ſons graves, c'eſt que les rapports que ceux-ci ont entr'eux ſont plus difficiles à ſaiſir que les rapports de ceux-là, tout étant égal d'ailleurs, puiſque la corde qui rend des ſons aigus fait plus de vibrations dans un

temps donné, que celle qui rend des ſons graves. Voilà pour l'emploi des rapports ſimples, & maintenant voici pour le retour des rapports compoſés aux rapports ſimples.

Si l'eſprit, qui eſt naturellement pareſſeux, s'accommode volontiers des rapports ſimples; comme il n'aime pas moins la variété qu'il craint la fatigue, on eſt quelquefois forcé d'uſer de rapports compoſés, tantôt pour faire valoir les rapports ſimples, tantôt pour éviter la monotonie, tantôt pour ajouter à l'expreſſion, & c'eſt de-là que naît en Muſique l'emploi que nous faiſons de la diſſonance; emploi

plus ou moins fréquent, mais preſque toujours néceſſaire: mais la diſſonance, ſelon les Muſiciens, veut ordinairement être préparée & ſauvée; ce qui bien entendu, ne ſignifie rien autre choſe, que ſi l'on a de bonnes raiſons d'abandonner les rapports ſimples pour en préſenter à l'oreille de compoſés, il faut revenir ſur le champ à l'emploi des premiers.

OBJECTION.

Mais comment ſe peut-il faire, dira-t-on, que le plaiſir des accords conſiſte dans la perception des rapports des ſons? La

connoiſſance de ces rapports accompagne-t-elle donc toujours la ſenſation ? c'eſt ce qu'il paroît difficile d'admettre ; car combien de gens, dont l'oreille eſt très-délicate, ignorent quel eſt le rapport des vibrations qui forment la quinte ou l'octave à celles qui donnent le ſon fondamental ? L'ame a-t-elle ces connoiſſances ſans s'en appercevoir ; à peu près comme elle eſtime la grandeur & la diſtance des objets, ſans la moindre notion de Géométrie, quoiqu'une eſpece de Trigonométrie naturelle & ſecrette paroiſſe entrer pour beaucoup dans le jugement qu'elle en porte ?

RÉPONSE.

Nous ne déciderons rien là-deſſus ; nous nous contenterons d'obſerver qu'il eſt d'expérience que les accords les plus parfaits ſont formés par les ſons qui ont entre eux les rapports les plus ſimples ; que ces rapports peuvent affecter notre ame de deux manieres, par ſentiment ou par perception, & qu'ils n'affectent peut-être la plupart des hommes que de la premiere maniere.

L'expérience apprend à modérer un archet ſelon la véhémence qu'on veut donner aux ſons. Quant à la tenſion des

cordes, on peut obſerver la regle ſuivante.

Il faut tendre les cordes autant qu'il eſt poſſible ſans les rompre. Les réſiſtances que des cordes minces d'une même matiere font à une puiſſance qui les tire dans le ſens de leur longueur, ſont comme leurs épaiſſeurs, & les épaiſſeurs comme les poids diviſés par les longueurs. On prendra donc les poids tendans en raiſon compoſée de la directe des poids des cordes & de l'inverſe de leurs longueurs.

Si le poids de la corde $= q$, ſa longueur $= a$, & le poids tendant $= p$: il faut que p ſoit

comme $\frac{q}{a}$, & par conſéquent la fraction $\frac{ap}{q}$ eſt conſtante. Car $P. p. :: \frac{Q}{A}. \frac{q}{a}$. Donc $\frac{pQ}{A} = \frac{Pq}{a}$, & $\frac{AP}{Q} = \frac{ap}{q}$.

En prenant cette précaution, on pourra ſe promettre des ſons également graves ou aigus pendant toute leur durée. Voyons maintenant ce qu'il y auroit à faire pour les avoir également forts.

V I I.

Pour donner à des ſons la même véhémence, outre la longueur & le poids de la corde, il faudroit conſidérer encore & la force qui la met en mouve-

ment & le lieu où cette force eſt appliquée. Mais la plupart des inſtrumens à cordes ſont fabriqués de maniere que la force pulſante eſt la même ; & pour ſimplifier le calcul, nous ſuppoſerons qu'elle agit ſur les cordes en des lieux ſemblables ; c'eſt-à-dire, ou aux milieux, ou aux tiers, ou aux quarts, &c.

Cela poſé, la véhémence du ſon ne dépendra plus que de la vîteſſe avec laquelle les particules de l'air viendront frapper l'oreille à chaque vibration de la corde. Or cette vîteſſe des molécules de l'air qui conſtitue la force du ſon, eſt proportion-

nelle à la plus grande vîteſſe de la corde, & la plus grande vîteſſe de la corde eſt, ſelon M. Euler, en raiſon ſous-doublée de la directe du poids qui la tend & de l'inverſe de ſa longueur; c'eſt-à-dire, en conſervant les mêmes expreſſions que ci-devant, comme $\sqrt{\frac{G}{L}}$. On lit page 11 de ſes *tentamina Muſicæ : Vehementia ſoni pendet à celeritate quâ aëris particulæ quâvis chordæ vibratione in aurem impingunt ; hæcque ex celeritate chordæ maximâ eſt æſtimanda. Eſt verò hæc celeritas proportionalis radici quadratæ ex pondere chordam tendente diviſo per lon-*

gitudinem ejus. D'où il conclut que, pour que la force de deux ſons ſoit la même, il faut que $\sqrt{\frac{G}{L}} = \sqrt{\frac{g}{l}}$, & par conſéquent que les poids tendans ſoient comme les longueurs des cordes. *Conſequenter quò ſoni ſiant æquabiles, neceſſe eſt ut pondus tendens ſemper ſit ut chordæ longitudo.*

Mais j'avouerai que, de quelque façon que je me ſois retourné, je n'ai jamais pu trouver la plus grande vîteſſe de la corde, comme la racine quarrée du poids qui la tend, diviſé par ſa longueur, ſans ſuppoſer la maſſe de la corde conſtante. Or cette

ſuppoſition n'a point été faite, & je doute qu'elle puiſſe avoir lieu ; car dans les inſtrumens à cordes de laiton, où l'épaiſſeur des cordes étant la même, elles ne different que par leur longueur & leur tenſion, & dans ceux où les cordes ont différentes longueur, épaiſſeur & tenſion, la maſſe n'eſt aſſurément pas la même dans chaque corde.

Si M. Euler entend par la plus grande vîteſſe de la corde, celle qu'elle a en achevant ſa premiere demi-vibration, je vais démontrer que $\frac{ca\sqrt{G}}{\sqrt{ML}}$ eſt ſon expreſſion.

PROBLÊME.

Trouver la plus grande vîtesse de la corde, ou celle qu'elle a en achevant sa premiere demi-vibration.

Solution.

Soient comme dans la Fig. 5. $BD = a$, $AC = L$, $BM = x$, $PM = y$, l'arc $BP = s$; la masse de la corde $= M$. Le rayon osculateur en $B = r$. Le rayon osculateur en $P = -\frac{dsdx}{ddy}$ & le rapport de la circonférence au diametre $= \frac{1}{c}$.

La masse de l'élément pP sera $\frac{M.Pp}{L}$. Car à cause de l'uniformité de la corde $L.M :: Pp$.

à la maſſe de l'élément Pp. Donc cette maſſe $= \frac{M.Pp}{L}$.

La force motrice en B eſt par le Lemme 2, $\frac{G.Pp}{r}$. Or la force accélératrice étant en raiſon compoſée de la directe de la force motrice & de l'inverſe de la matiere à mouvoir, & la matiere à mouvoir étant ici $\frac{M.Pp}{L}$, on aura pour la force accélératrice en B, $\frac{GL}{Mr}$.

Mais Corollaire 1, Propoſition 1, $r = \frac{LL}{a.c^2}$. Donc la force accélératrice en B ſera $\frac{G.a.c^2}{ML}$.

Soit $DM = z$.

La force accélératrice en M sera $\frac{G.a.c^2}{ML} \times \frac{DM}{BD} = \frac{G.c^2.z}{ML}$. Donc par le principe $pdt = du$, nommant u la vîtesse en M, on aura l'équation suivante $-\frac{G.c^2.zdz}{ML} = udu$; car $dt = -\frac{dz}{u}$. Donc intégrant & complétant $\frac{u^2}{2} = \frac{G.c^2}{ML} \times \overline{\frac{aa-zz}{z}}$. Donc lorsque $z = 0$; on a $uu = \frac{G.c^2.a^2}{ML}$ & $u = \frac{ac\sqrt{G}}{\sqrt{ML}}$. Ce que j'avois à démontrer.

REMARQUE.

Mais pour vérifier cette expression de la vîtesse, supposons-

la telle que nous venons de la trouver, & cherchons par son moyen le rapport des temps d'une vibration de la corde L & d'une oscillation d'un pendule dont la longueur soit D.

Nous avons trouvé $u = \frac{c\sqrt{G}}{\sqrt{ML}} \times aa - zz$, mais $dt = -\frac{dz}{u}$. Donc $dt = -\frac{dz\sqrt{ML}}{c.\sqrt{G}.\sqrt{aa-zz}} = \frac{\sqrt{ML}}{c.\sqrt{G}} \times -\frac{dz}{\sqrt{aa-zz}} = \frac{\sqrt{ML}}{c\sqrt{G}}$ multiplié par l'élément du quart de cercle BNE dont $\frac{dz}{\sqrt{aa-zz}}$ est l'expression. Donc le temps d'une demi-vibration $= \frac{\sqrt{ML}}{c.\sqrt{G}} \times \frac{BNE}{BD} = \frac{\sqrt{ML}}{c\sqrt{G}} \times \frac{c}{2} = \frac{\sqrt{ML}}{2\sqrt{G}}$.

Soit maintenant (*Fig.* 8.) le pendule CA dont la longueur $CA = D$. La pesanteur $= p$. L'arc $AB = e$. $AN = x$. L'effort en B est $\frac{p \times AB}{CA}$. L'effort en N est $\frac{p \times AN}{CA} = \frac{px}{D}$. Donc par le principe $pdt = du$, on a $-\frac{pxdx}{D} = udu$. Donc intégrant & complétant $u = \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{D}} \times \sqrt{ee - xx}$. Donc $dt = -\frac{dx}{u} = \frac{\sqrt{D}}{\sqrt{p}} \times -\frac{dx}{\sqrt{ee - xx}}$. Donc le temps d'une demi-oscillation $= \frac{\sqrt{D}}{\sqrt{p}} \times \frac{c}{2}$. Donc le temps d'une demi-vibration est au temps d'une demi-oscillation comme $\frac{\sqrt{ML}}{2\sqrt{G}}$ à $\frac{\sqrt{D}}{\sqrt{p}} \times \frac{c}{2}$ ou comme $\sqrt{pML}$ à $\sqrt{ccDG}$.

Mais la maſſe multipliée par la peſanteur d'une particule eſt égale au poids ou $pM = P$. Donc $\sqrt{pML} = \sqrt{PL}$. Donc le temps d'une vibration eſt au temps d'une oſcillation comme $\sqrt{PL}$ à $\sqrt{ccDG}$. Or c'eſt préciſément ce que nous avons démontré ailleurs, & ce que Monſieur Euler ſuppoſe dans toutes ſes propoſitions ſur les cordes.

Cependant comme il eſt beaucoup plus vraiſemblable que je n'entends point cet endroit de M. Euler, qu'il ne l'eſt qu'il ſe ſoit trompé ; je ſuppoſerai que, afin que la véhémence de deux ſons ſoit la même, il faut que les poids tendans ſoient propor-

tionnels aux longueurs des cordes ; d'où nous déduirons avec lui une regle qui peut être d'usage dans la conſtruction des inſtrumens.

Conſervant toujours les mêmes expreſſions ; $\frac{G}{L}$, $\frac{GL}{P}$, $\frac{LL}{P}$ quotient de $\frac{GL}{P}$ diviſé par $\frac{G}{L}$ & le rapport de $\frac{P}{L}$ à L ſont tous conſtans : $\frac{G}{L}$, parce que les poids tendans doivent toujours être comme les longueurs , pour que la véhémence des ſons ſoit la même ; $\frac{GL}{P}$, parce que les poids tendans doivent toujours être en raiſon compoſée de la directe des poids des cordes & de l'inverſe de

leurs longueurs, pour que les ſons ſoient uniformes. Et ces deux raiſons conſtantes diviſées l'une par l'autre donnent le rapport conſtant de LL à P, ou celui de $\frac{P}{L}$ à L. Mais $\frac{P}{L}$ eſt l'épaiſſeur de la corde; l'épaiſſeur de la corde doit donc être comme ſa longueur, & la longueur comme le poids tendant.

D'ailleurs le ſon eſt, ainſi que nous l'avons démontré, comme $\sqrt{\frac{G}{PL}}$, & metrant à la place de G & de P leurs proportionnelles L & LL, on trouve le ſon réciproquement comme la longueur de la corde.

Ainſi, ſelon le ſavant Auteur

que nous avons cité, pour conserver à un son l'uniformité & l'égalité de force entre plusieurs sons, il faut que le poids tendant, la longueur de la corde, & son propre poids, soient tous réciproquement comme le son ou comme le nombre des vibrations à produire dans un temps donné, la force pulsante étant la même.

Remarque.

Mais tout cela n'est vrai que dans la supposition, que l'expression de la plus grande vîtesse n'est pas telle que nous l'avons trouvée. Car si $u = \frac{acV G}{V\overline{ML}}$, on aura

aura pour que les véhémences soient égales $\frac{VG}{\sqrt{ML}} = \frac{Vg}{\sqrt{ml}}$, & par conséquent $\frac{VG}{\sqrt{ML}}$ constante. D'ailleurs lorsque les cordes sont de même matiere, les masses sont comme les poids : donc substituant P à M, on aura $\sqrt{\frac{G}{PL}}$ constante. Or $\sqrt{\frac{G}{PL}}$ est l'expression du son. Donc la force pulsante étant la même, il faut que les sons soient les mêmes pour être également forts, ou des sons différens ne peuvent être également forts, la force pulsante étant la même ; résultat bien différent de celui que donne l'expression que M.

E

Euler aſſigne à μ, & cependant aſſez conforme à l'expérience.

On pourroit ſe propoſer ici un Problême dont je vais donner la ſolution, c'eſt de trouver le plus grand écart de la corde, la force pulſante étant donnée.

PROBLÊME.

La force pulſante étant donnée, trouver le plus grand écart de la corde.

SOLUTION.

Soit (Fig. 5.) *F* la force pulſante. Les points *S* de la corde partiront avec des vîteſſes qui feront comme *S P*, car je ſupppoſe que la corde prend

tout en partant la forme de la courbe muſicale ; & chaque particule de cette corde étant ſuppoſée animée de ſa vîteſſe initiale, la ſomme des forces qui en réſultera, ſera égale à *F*.

Soit *u* la vîteſſe en *D*, $\frac{uz}{a}$ ſera la vîteſſe en *S*, $Pp = dy$, & par conſéquent la maſſe $Pp = \frac{Pdy}{L}$, & la quantité de mouvement en *S* $= \frac{uz}{a} \times \frac{Pdy}{L}$. Subſtituant à dy & à z leurs valeurs tirées de l'équation de la courbe, l'expreſſion précédente ſe transformera en $\frac{u.P.r^{\frac{1}{2}}.a^{\frac{1}{2}}}{L} \times \frac{\overline{a-x}\,dx}{\sqrt{2ax-xx}}$, dont l'intégrale eſt $\frac{u.P.r^{\frac{1}{2}}.a^{-\frac{1}{2}}}{L} \times \sqrt{2ax-xx}$

qu'il faut doubler & compléter : je dis doubler, parce que l'intégrale prise sans être doublée ne donneroit que la quantité de mouvement de la partie *C D*.

On a donc $\frac{2uPr^{\frac{1}{2}}a^{-\frac{1}{2}}\times a^{1}}{L}=\frac{2uPr^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{2}}}{L}$ qu'il faut faire égal à *F*.

Mais $r=\frac{ll}{a.c^{2}}$, donc $r^{\frac{1}{2}}=\frac{L}{a^{\frac{1}{2}}c}$.

Donc $F=\frac{2uP}{c}$.

Mais $u=\frac{ac\sqrt{G}}{\sqrt{ML}}$. Donc $\frac{F.c}{2P}=\frac{ac\sqrt{G}}{\sqrt{ML}}$. Or les cordes étant supposées de même matiere, $M=P$. Donc $a=\frac{F\sqrt{L}}{2\sqrt{PG}}$. Ce qu'il falloit trouver.

Cette derniere expression peut encore se simplifier ; car nous avons dit que pour avoir des sons uniformes, il falloit que G fût comme $\frac{P}{L}$; substituant donc cette valeur, il vient $a = \frac{FL}{2P}$.

Nous allons passer à quelques autres sons de la premiere espece, & abandonner les cordes pour n'y revenir que lorsque l'analogie des corps sonores dont nous avons encore à parler, nous y ramenera.

VIII.

On peut rapporter à la premiere espece de son, les cloches, les verges de métaux,

& même les bâtons durcis au feu ; mais on ſait peu de choſe ſur ces corps. Il eſt preſque impoſſible de déterminer le ſon d'une cloche par ſa forme & ſon poids. Il faudroit entrer dans des conſidérations vagues ſur l'élaſticité & la cohéſion des parties de la matiere dont on les fond. Ce que l'on peut avancer, c'eſt que les ſons de deux cloches de même matiere & de figures ſemblables, ſeront entre eux réciproquement comme les racines cubiques des poids ; c'eſt-à-dire, que ſi l'une peſe huit fois moins que l'autre, elle fera dans le même temps un nombre double de vibrations ;

un nombre triple, ſi elle peſe vingt-ſept fois moins; & ainſi de ſuite. Car en leur appliquant ce que nous avons dit des cordes, & faiſant le poids tendant G comme $\frac{P}{L}$, la formule $\sqrt{\frac{G}{PL}}$ ſe réduit à $\frac{1}{L}$; mais lorſque des corps homogenes ſont ſemblables, leurs poids ſont entre eux comme les cubes de leurs côtés homologues, & par conſéquent leurs côtés homologues comme les racines cubiques de leurs poids; donc les nombres de vibrations produites dans un temps donné étant comme $\frac{1}{L}$, elles feront auſſi comme $\frac{1}{\sqrt[3]{P}}$.

Quant aux verges ſonores ; ſi, pour eſtimer le rapport de leurs ſons, il ne faut avoir égard qu'à leurs longueurs, comme Monſieur Euler le prétend ; s'il faut conſidérer les fibres qui les compoſent comme autant de cordes qui font leurs vibrations ſéparément ; s'il faut négliger la force tendante, la formule $\sqrt{\frac{G}{PL}}$ devient alors $\sqrt{\frac{1}{PL}}$. Mais ſi les verges ſont ſemblables & de même matiere, P ſera comme L^3. Donc $\sqrt{\frac{1}{PL}}$ ſe réduit à $\frac{1}{L^2}$; c'eſt-à-dire, que les nombres de vibrations produites dans un temps donné, ſeront récipro-

quement comme les quarrés des longueurs.

REMARQUE.

Mais, dira-t-on, pourquoi négliger dans le cas des verges la force tendante que l'on fait entrer en calcul, lorſqu'il eſt queſtion des cloches ?

C'eſt que la roideur des verges eſt ſi grande, relativement à la force pulſante qui les fait réſonner, qu'on peut ſans erreur ſenſible traiter comme conſtante la force qui les tend. Mais il n'en eſt pas ainſi des cloches. La figure d'une cloche s'altere ſenſiblement, quand elle eſt en volée. De ronde qu'elle étoit,

en repos, le coup du battant la rend ovale ; & l'œil apperçoit cet effet, qui sera d'autant moins sensible que le poids de la cloche sera grand, eu égard à son diametre ; c'est-à-dire, que la force tendante peut être supposée comme $\frac{P}{L}$.

La dilatation & la percussion subite de l'air, qui sont les deux causes des sons de la seconde espece, agissent à peu près de la même maniere.

L'extrême vîtesse de l'air dans la dilatation, ou celle d'un corps mu dans la percussion, donne lieu à une compression ; l'air comprimé tend à se restituer dans

ſon état naturel ; mais d'un mouvement accéléré en vertu duquel il exerce des vibrations ſemblables à celles d'une corde. Or c'eſt par ces vibrations qu'il faut expliquer le bruit, ou plutôt le ſon des vents, du tonnerre, de la poudre à canon, & de tout corps lancé dans l'air avec vîteſſe. Mais comme il eſt impoſſible d'appliquer à ces phénomenes le calcul, je paſſe aux ſons de la troiſieme eſpece, après avoir obſervé qu'il y a entre le bruit & le ſon une grande différence.

Le bruit eſt un ; le ſon au contraire eſt compoſé ; un ſon ne frappe jamais ſeul nos oreilles ;

on entend avec lui d'autres ſons concomitans, qu'on appelle ſes harmoniques. C'eſt de-là que M. Rameau eſt parti dans ſa génération harmonique ; voilà l'expérience qui ſert de baſe à ſon admirable ſyſtême de compoſition, qu'il ſeroit à ſouhaiter que quelqu'un tirât des obſcurités qui l'enveloppent, & mît à la portée de tout le monde, moins pour la gloire de ſon inventeur, que pour les progrès de la ſcience des ſons.

I X.

Plus la cauſe d'un phénomene eſt cachée, moins on fait d'efforts pour la découvrir. Mais

cette paresse, ou ce découragement des esprits, n'est ni le seul, ni peut-être le plus grand obstacle à la perfection des Arts & des Sciences. Il y a une sorte de vanité qui aime mieux s'attacher à des mots, à des qualités occultes, ou à quelqu'hypothese frivole, que d'avouer de l'ignorance; & cette vanité leur est plus funeste encore. Bien ou mal, on veut tout expliquer, & c'est, grace à cette manie, que l'horreur du vide a fait monter l'eau dans les pompes, que les tourbillons ont été la cause des mouvemens célestes, que l'attraction sera long-temps encore celle de la pesanteur des corps,

& pour en revenir à mon ſujet, qu'on avoit attribué juſqu'à préſent au frémiſſement de la ſurface intérieure du tuyau, le ſon & les autres propriétés des Flûtes. Ces inſtrumens avoient beau rendre le même ſon, quoique l'épaiſſeur, la matiere & l'ouverture en fuſſent différentes; on s'en tenoit opiniâtrément à un ſyſtême que la diverſité ſeule de la matiere étoit capable de renverſer.

Enfin M. Euler, après avoir ſoigneuſement examiné la ſtructure des Flûtes, trouva une maniere d'en expliquer les effets, auſſi ſolide qu'ingénieuſe. Ce morceau de Phyſique eſt peu

connu, quoique ce soit un des plus beaux que nous ayons ; ce sont ces deux motifs réunis au besoin que j'en ai pour les conséquences que j'en tirerai, qui me déterminent à l'insérer ici.

La Flûte est composée ainsi que les tuyaux appellés dans un buffet d'Orgue, tuyaux à bouche ou de mutation ; du pied *A A B B* qui est en bec ou en cône : c'est ce bec qui introduit le vent qui fait résonner le tuyau. A ce pied est joint le corps *B B D D* du tuyau. Il y a entre le pied & le corps un diaphragme *E E F* percé d'une ouverture par où le vent s'échappe. On appelle cette ouverture lumiere.

Enfin au-dessous de cette ouverture est la bouche *BBCC* du tuyau. C'est une espece de fenêtre dont la levre d'en bas *CC*, qui est en biseau, coupe le vent au sortir de la lumiere, & n'en admet dans le tuyau qu'une couche légere. Telle est aussi la figure des anches & celle que prennent les levres au défaut d'anches ; ce qui fait rentrer les Flûtes traversieres & autres, dans la classe des Flûtes à bec ou tuyaux de mutation.

Il faut observer de plus, que dans tous les instrumens à vent, les parois intérieures sont dures & polies, & que l'air n'y rencontre aucun obstacle.

Il ſuit de cette conſtruction que l'air au ſortir de la lumiere raſe la ſurface intérieure du tuyau, & comprime celui dont il étoit rempli. Cet air comprimé ſe dilate à ſon tour, & le ſon eſt produit par ces vibrations réciproques qui naiſſent de l'inſpiration & qui durent autant qu'elle.

Cela ſuppoſé, dit M. Euler, cherchons le ſon d'une Flûte dont la longueur & la capacité ſoient données, & renonçons à cette explication, ſi la ſolution de ce problême ne s'accorde pas avec les expériences.

Le corps ſonore dont les vibrations tranſmiſes à l'air vien-

nent frapper notre oreille, c'eſt l'air même contenu dans le tuyau, dont la quantité ſe déterminera par la longueur & la capacité de la Flûte.

La peſanteur de l'atmoſphere qui contraint l'air, dont la Flûte eſt remplie, d'exercer des vibrations, fait ici la fonction de poids tendant, & ce poids ſera connu par la hauteur à laquelle le vif-argent eſt ſuſpendu dans le tube de Torricelli.

Voilà donc le cas des Flûtes réduit à celui des cordes & ſoumis à la formule $\sqrt{\frac{G}{PL}}$.

Soit *a* la longueur d'une Flûte; *bb* ſon ouverture; le rapport de

la peſanteur de l'air à celle du vif-argent $\frac{m}{n}$; la hauteur du mercure dans le barometre k; c'eſt-à-dire, que nous avons une corde dont la longueur eſt a, le poids $mabb$, & la tenſion égale à la preſſion de l'atmoſphere. Mais les preſſions des fluides ſont, comme on le démontre en hydrodynamique, comme les baſes multipliées par les hauteurs. La baſe eſt ici bb, & la hauteur k; donc le poids tendant eſt comme $nkbb$; & par conſéquent le nombre des oſcillations faites dans une ſeconde comme $\frac{355}{113}\sqrt{\frac{881nkbb}{24a \times mabb}}$

$= \frac{355}{113a} \sqrt{\frac{881nk}{24m}} =$ au ſon qu'il falloit déterminer.

Or la raiſon de m à n étant toujours à peu près la même, & les différentes températures de l'air n'influant pas conſidérablement ſur la hauteur k, les ſons des Flûtes cylindriques ou priſmatiques ſeront entr'eux réciproquement comme les longueurs. Car effaçant toutes les conſtantes, l'équation précédente ſe réduit à $\frac{1}{a}$.

Mais entrons dans le détail des phénomenes, c'eſt lui qui ruine ou ſoutient une hypotheſe. Cherchons donc en demeurant dans celle de M. Euler,

comment le ſon d'une Flûte, dont la longueur eſt donnée, eſt au ſon d'une corde, dont la longueur, le poids & la tenſion ſont connus. Si l'expérience & le calcul conſervent entre la corde & la Flûte l'uniſſon que nous y ſupposerons, il en résultera pour la théorie que nous venons d'exposer, un grand degré de certitude.

Soit la plus grande valeur de $\frac{n}{m}$ dans les temps chauds 12000. Sa plus petite valeur dans les temps froids 1000. La plus grande hauteur k du mercure dans le Barometre 2460. Sa plus petite hauteur 2260. Donc le

Barometre & le Thermometre étant l'un & l'autre à leurs plus grandes hauteurs, le son d'une Flûte quelconque *a*, sera comme $\frac{960771}{a}$; & lorsqu'ils seront à leurs plus petites hauteurs, comme $\frac{840714}{a}$; & prenant un milieu entre ces deux expressions, on aura $\frac{900000}{a}$ pour le nombre des vibrations, & par conséquent pour le son d'une Flûte *a*, dans les temps ordinaires, lorsqu'il ne fait ni bien froid ni bien chaud. Donc une Flûte qui fait 100 vibrations par seconde, a 9000 scrupules ou 9 pieds du rhin de longueur. Donc une Flûte qui feroit 118 vibra-

tions par ſeconde, & qui réſonneroit le *c* ou le C ſol ut, auroit 7627 ſcrupules ou 7 $\frac{1}{2}$ pieds du rhin de longueur; ce qui s'accorde avec l'expérience. Car c'eſt en effet cette longueur que l'on donne aux tuyaux que l'on prend pour le C ſol ut.

Mais, dira-t-on, ce n'eſt pas 7 $\frac{1}{2}$ pieds qu'on leur donne; mais 8 pieds communément.

J'en conviens; mais il faut négliger cette différence; car ſelon la température de l'air, le tuyau rendra des ſons qui ſeront entre eux dans la raiſon des nombres 840714, 960771, ou dans le rapport de 8 à 9; ce qui prend

plus d'un demi pied ſur la longueur entiere du tuyau.

Ces altérations ſucceſſives dans le ſon d'une même Flûte achevent de confirmer le ſyſtême de M. Euler. Car les Muſiciens éprouvent tous les jours dans la comparaiſon qu'ils ont à faire des inſtrumens à corde avec les inſtrumens à vent, que pour les mettre à l'uniſſon, il faut tantôt diminuer, tantôt augmenter la tenſion des cordes, & que la plus grande différence eſt d'un ton majeur entier, intervalle exprimé par le rapport de 8 à 9.

On obſerve encore que les Flûtes ont plus de haut dans un temps

temps ſerein & chaud, que dans un temps froid & orageux, & qu'elles deviennent un peu plus aiguës pendant qu'on en joue. Ces deux phénomenes partent de la même cauſe. C'eſt que la chaleur naturelle de l'air dans un temps ſerein, ou celle qu'il reçoit pendant l'inſpiration, rend ſes vibrations un peu plus promptes, & par conſéquent le ſon un peu plus aigu; & d'ailleurs le poids de l'air *m* étant moindre, la fraction $\frac{n}{m}$ eſt plus grande, & par conſéquent le nombre des vibrations plus grand.

La force du ſon dépend, dans les Flûtes, de la violence de l'inſ-

piration & du rapport de la capacité du tuyau à sa longueur. Il en est encore en cela de ces instrumens comme des cordes. La longueur & l'épaisseur de celles-ci répondent à la longueur & à la capacité de ceux-là.

Toute corde n'est pas propre à rendre tout son. Il lui faut quelquefois une certaine grosseur pour un son donné. On ne peut pas non plus augmenter ou diminuer à discrétion la capacité d'une Flûte de longueur donnée. Il y a des limites, au-delà desquelles elle ne résonne plus. Mais appliquant aux tuyaux à bouche, ce que nous avons dit de la longueur, du poids, & de la

tension des cordes ; pour en tirer des sons uniformes, il faut faire la base ou la capacité proportionnelle à la longueur, & la longueur proportionnelle à la pression de l'atmosphere qui est toujours proportionnelle à l'ouverture.

Quant à l'inspiration, elle a aussi ses lois. Trop foible, la Flûte ne rend point de son. Trop forte, elle fait résonner la Flûte une octave au-dessus de son ton. Plus forte encore, elle rendra la douzieme, la quinzieme, & ainsi de suite.

Pour découvrir le rapport de ces degrés successifs, nous serons forcés de revenir aux cordes

& d'en examiner quelques propriétés. En attendant, nous observerons que, la force du ſon dans les Flûtes étant proportionnelle à celle de l'inſpiration, plus l'inſpiration ſera violente, le ſon demeurant le même quant au degré du grave à l'aigu, plus les vibrations de l'air contenu dans le tuyau ſeront grandes, ſans toutefois qu'elles en deviennent plus fréquentes. Mais la grandeur ou l'amplitude des vibrations eſt tellement déterminée par la capacité ou le diametre de la Flûte, que le même ſon ne peut pas ſubſiſter & conſerver ſon degré dans toutes les variations poſſibles de l'inſpiration.

Il faut même qu'après avoir paſſé ſucceſſivement par différens degrés du grave à l'aigu, il s'éteigne entiérement.

X.

Ce paragraphe ſera ſans doute un des meilleurs de ce Mémoire; je le dois preſqu'en entier à M. de Fontenelle. Cet Auteur dit ingénieuſement à ſon ordinaire, Hiſtoire de l'Académie, année 1700, qu'une recherche, ou même une découverte, n'eſt, pour ainſi parler, que l'épiſode d'une autre. Monſieur Sauveur, ajoute-t-il, en examinant la théorie de certains inſtrumens qui vont par *ſauts* & paſſent irré-

guliérement d'un ton à un autre, fut obligé, pour en rendre raison, de recourir à des expériences qui lui produisirent un phénomene dont il fut extrêmement surpris; car quel Philosophe auroit cru qu'un corps mis en mouvement de maniere que toutes ses parties y doivent être, en conserve cependant quelques-unes immobiles dans de certains intervalles, ou plutôt en rend quelques-unes immobiles par une distribution singuliere qu'il semble faire entr'elles du mouvement qu'il a reçu.

Si une corde d'instrument est tendue sur une table, & qu'un chevalet mobile qui glisse sous

la corde ſoit arrêté à quelqu'un de ſes points, en ſorte que, quand on pincera par le milieu l'une des deux parties déterminées par la poſition du chevalet, l'autre ne participe point du tout à l'ébranlement, on ſait que le ton de la partie pincée ſera au ton de toute la corde, en raiſon des longueurs de cette partie & de la corde entiere. Si cette partie eſt $\frac{1}{4}$, elle ſera à la double octave en haut de toute la corde. Si elle eſt $\frac{1}{2}$, elle ſera à ſon octave; & ſi au lieu de pincer $\frac{1}{4}$, on pinçoit la partie $\frac{3}{4}$, il eſt encore indubitable que les longueurs de cette partie & de la corde entiere étant comme 3

à 4, l'une résonneroit la quarte de l'autre.

Mais si le chevalet n'empêche pas entiérement la communication des vibrations des deux parties ; si ce n'est qu'un obstacle léger, comme le bout d'une plume ; si la corde est menue, les deux parties, quoiqu'inégales, rendront le même ton & formeront le même intervalle avec la corde entiere.

Il ne seroit pas étonnant qu'elles fussent toutes deux à l'unisson de la corde entiere ; on concevroit alors que l'obstacle léger ne les empêcheroit pas de faire les mêmes vibrations que la corde entiere, & qu'il ne tiendroit lieu

de rien. Mais il eſt effectivement obſtacle ; il détermine les parties de la corde à être effectivement parties & à rendre un ſon différent de la toute, & le merveilleux eſt qu'il laiſſe le même ton à des parties inégales. Si, par exemple, l'obſtacle eſt au quart de la corde, non-ſeulement ce quart étant pincé rend la double octave aiguë de la toute ; mais l'autre partie qui eſt trois quarts, & qui devroit donner la quarte de la toute, donne la même double octave.

Sur ce phénomene ſi bizarre, M. Sauveur imagina que, puiſque $\frac{3}{4}$ rendoient le même ton que $\frac{1}{4}$, ils ne devoient faire des

vibrations proportionnées à leurs longueurs ; qu'il falloit qu'ils se partageassent en trois parties égales chacune au premier quart, & qui fissent chacune leurs vibrations séparément. En ce cas, c'eût été la même chose que si l'on eût pincé à la fois ces trois parties égales. Elles eussent été toutes à l'unisson entr'elles & avec le premier quart, c'est-à-dire, à la double octave aiguë de la corde entiere. Mais cela supposé comme vrai, il y auroit donc eu nécessairement entre les vibrations de deux parties égales un point immobile qui ne suivoit ni l'une ni l'autre vibration, & par conséquent deux

points immobiles fur les $\frac{1}{9}$ de la corde, & 3 dans la corde entiere ; en comptant pour un de ces points celui où eft pofé l'obftacle léger, parce qu'il eft effectivement entre deux vibrations. Monfieur Sauveur appelle ces vibrations partielles & féparées, ondulations ; leurs points immobiles, nœuds ; & le point du milieu de chaque vibration, le ventre de l'ondulation.

Lorfque M. Sauveur apporta à l'Académie cette expérience de deux tons égaux fur les deux parties inégales d'une corde; elle y fut reçue avec tout le plaifir que font les nouvelles découvertes. Mais quelqu'un de la

Compagnie se souvint qu'elle étoit déjà dans un ouvrage de M. Wallis. Quant à la pensée des nœuds, qui n'étoit qu'un petit systême, on trouva dans l'assemblée le moyen d'éprouver si elle étoit vraie. On mit sur les points de la corde où, suivant la supposition, se devoient faire les nœuds & les ventres des ondulations, de très-petits morceaux de papier à demi pliés qui pouvoient tomber sans peine au moindre mouvement. On pinça la corde, & l'on vit avec contentement, & même avec admiration, que les petits papiers des ventres tomberent aussi-tôt, & que ceux des nœuds demeurerent

en place : dans la ſuite, pour les diſtinguer mieux, on fit les uns rouges, & on laiſſa les autres blancs ; de ſorte que les rouges & les blancs étoient diſpoſés alternativement, & l'on vit toujours qu'il n'y avoit que ceux d'une couleur qui tombaſſent. Les points qui d'eſpace en eſpace ſe maintiennent immobilés entre tous les autres points qui ſe meuvent, & dans un corps qui auroit dû prendre du mouvement ſelon toute ſa longueur, auroient été ſans doute une grande merveille pour un Phyſicien qui n'y auroit pas été préparé & amené par degrés.

Il paroît par-là que l'obſtacle

léger, placé comme nous l'avons ſuppoſé juſqu'ici ſur un quart de corde, n'empêche pas à la vérité la communication des vibrations de deux parties de la corde, parce qu'il eſt léger; mais qu'au moins il empêche une communication facile, parce qu'il eſt obſtacle. Il détermine d'abord les deux parties à faire ſéparément & indépendamment l'une de l'autre leurs vibrations. Mais comme elles ſont inégales, la plus petite fait ſes vibrations beaucoup plus vîte; & parce qu'elle communique toujours avec l'autre qui eſt beaucoup plus lente, elle la hâte & la force à ſuivre ſon mouvement.

Or cette partie plus grande ne peut jamais, à cauſe de ſa longueur, faire ſes vibrations en même temps que la plus petite, & lui obéir, à moins qu'elle ne ſe partage en parties toutes égales à cette partie qui domine à cauſe de ſa vîteſſe.

Si au lieu de mettre l'obſtacle ſur $\frac{1}{4}$, on le met ſur $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, &c. ce ſera toujours la même choſe, & le ton des $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, &c. ne ſera que celui de $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$, &c. en un mot, l'obſtacle léger étant poſé ſur une partie aliquote quelconque de la toute, c'eſt elle ſeule qui donne le ton à la partie plus grande qui eſt de l'autre côté.

Mais ſi l'obſtacle n'eſt point ſur une partie aliquote ; par exemple, ſi la corde ayant cinq parties, il eſt ſur les $\frac{2}{5}$; ces $\frac{2}{5}$ forçant d'abord les $\frac{3}{5}$ qui ſont de l'autre côté à prendre une vîteſſe égale à la leur, ces $\frac{3}{5}$ ne la peuvent prendre qu'en s'accourciſſant & en s'égalant aux $\frac{2}{5}$. Il reſte donc $\frac{1}{5}$ qui eſt la plus petite partie & dont les vibrations ſont les plus promptes. Cette petite partie qui n'a point été déterminée d'abord par la poſition de l'obſtacle, & qui ne ſe forme que dans la ſuite & par une conſéquence de la formation des autres, ne laiſſe pas de donner la loi à tout le reſte, & les $\frac{2}{5}$ &

les $\frac{3}{5}$ ne rendront le ton que de $\frac{1}{5}$. Si l'obſtacle étoit mis ſur $\frac{4}{7}$, il eſt évident par la même raiſon qu'elle ſe partageroit auſſi en 7 parties ; c'eſt la même choſe pour tous les autres cas ſemblables.

En appliquant cette hypotheſe ſur trois vingtiemes, il ſemble que ces $\frac{3}{20}$ partageant d'abord la corde en parties égales à elles, il reſteroit pour petite partie qui devroit dominer le reſte $\frac{2}{20}$ ou $\frac{1}{10}$, & qu'ainſi la corde ſe partageroit en dixiemes. Mais il faut remarquer que l'obſtacle doit toujours former un nœud à l'endroit où il eſt, parce qu'effectivement il arrête en partie les

vibrations & qu'il eſt le premier principe qui les change. Or dans l'hypotheſe préſente, ſi la corde ſe partageoit en dixiemes, l'obſtacle ſe trouveroit ſur un ventre & non ſur un nœud; ce qui eſt impoſſible, & par conſéquent il faut que la corde ſe partage en vingtiemes.

Donc, que l'obſtacle ſoit mis ſur une partie aliquote ou non, la corde ſe partagera toujours dans le nombre de parties marqué par le dénominateur de la fraction.

Il s'enſuit de-là que quelque différentes que ſoient les parties où l'on met l'obſtacle, le ton eſt le même toutes les fois que le

dénominateur de la fraction eſt néceſſairement le même. Par exemple, la corde étant de 20 parties, il ſera indifférent de mettre l'obſtacle ſur $\frac{1}{20}$, $\frac{3}{20}$, $\frac{7}{20}$, $\frac{9}{20}$, $\frac{11}{20}$, $\frac{13}{20}$, $\frac{17}{20}$, $\frac{19}{20}$. Mais non pas ſur $\frac{2}{20}$, $\frac{4}{20}$, $\frac{5}{20}$, &c. parce que ces fractions pouvant ſe réduire, le dénominateur n'eſt pas néceſſairement le même.

En faiſant couler l'obſtacle ſous les 20 diviſions de la corde, il eſt aiſé de voir quels ſont les nœuds ou intervalles des ſons des différentes parties de la corde, comparés au ſon de la corde entiere. En voici une petite Table tirée de l'Hiſtoire de l'Académie.

TABLE.

Parties de la corde divisée en vingtiemes.	*Intervalles rendus par les différentes parties relativement à la corde entiere.*
$\frac{1}{20}$, $\frac{3}{20}$, $\frac{7}{20}$, $\frac{9}{20}$, $\frac{11}{20}$, $\frac{13}{20}$, $\frac{17}{20}$, $\frac{19}{20}$,	$\frac{1}{16}$ est la quatrieme octave de 1.

$\frac{1}{16}$ & $\frac{1}{20}$ sont entre eux comme 4 à 5, expression de la tierce majeure. C'est-à-dire, que si l'on divise une corde 1 en vingtiemes, & que si l'on met d'un côté d'un obstacle léger $\frac{1}{20}$, & de l'autre $\frac{19}{20}$, ou $\frac{3}{20}$ & $\frac{17}{20}$, ou $\frac{7}{20}$ & $\frac{13}{20}$, &c. les sons rendus par les deux parties de la corde feront une tierce majeure avec la quatrieme octave de la corde entiere.

Ou $\frac{2}{10}$ / $\frac{1}{10}$ — $\frac{1}{8}$ eſt la troiſieme octave de 1. Or les ſons rendus par $\frac{1}{8}$ & $\frac{1}{10}$ ſont entr'eux réciproquement comme ces longueurs, c'eſt-à-dire, comme 8 à 10, où 4 à 5, tierce majeure. Donc les parties de la corde entiere $\frac{2}{10}$ & $\frac{18}{10}$, & $\frac{1}{10}$ & $\frac{9}{10}$ diviſée par un obſtacle léger, donneront des ſons qui ſeront à la tierce majeure de la troiſieme octave aiguë de la corde entiere.

Ou $\frac{4}{20}$ / $\frac{1}{5}$ — $\frac{1}{4}$ eſt la ſeconde octave de 1. Mais les ſons rendus par $\frac{1}{4}$ & $\frac{1}{5}$, ſont entr'eux réciproquement comme ces longueurs ou comme 4 à 5, c'eſt-à-

dire, qu'ils ſeront à la tierce majeure de la ſeconde octave de 1 ou de la corde entiere.

REMARQUE.

Une expérience qui méritoit bien d'être faite, & qu'il ne paroît pas qu'on ait tentée, c'eût été de diviſer la corde entiere en parties égales, & une de ces parties égales en deux autres qui euſſent un rapport incommenſurable entr'elles, comme celui de 1 à $\sqrt{2}$, ou $\sqrt{3}$, ou $\sqrt{5}$, & de laiſſer l'incommenſurable d'un côté de l'obſtacle léger, & le reſte de la corde de l'autre.

QUESTIONS.

Si les deux parties dans lesquelles la corde entiere est divisée par l'obstacle léger, sont incommensurables entr'elles ;

1°. Quel sera le son rendu par les deux parties ?

2°. Quel rapport aura ce son avec celui de la corde entiere ?

3°. Y aura-t-il sur la corde pincée, après avoir ainsi placé l'obstacle léger, des ondulations, des nœuds, des ventres & des points immobiles ?

4°. Dans la supposition qu'il y ait des nœuds, où seront-ils placés ?

RÉPONSE.

Lorſque les parties de la corde ſont incommenſurables, n'arrivera-t-il pas un phénomene analogue à celui que rapportent quelques Auteurs d'optique qu'il a ſi fort embarraſſés. C'eſt la viſion confuſe de l'objet, lorſque les rayons réfléchis ou rompus entrent dans l'œil convergens ; c'eſt-à-dire, comme s'ils venoient d'un point placé derriere l'œil. Si cela eſt, voilà des choſes communes entre deux ſenſations d'une eſpece bien différente.

Il eſt évident qu'en continuant la Table précédente, le mouvement

mouvement de l'obſtacle léger, toujours promené de l'une de ces parties à l'autre, produiroit une ſuite irréguliere de tons, tantôt les mêmes, tantôt différens, & qu'un inſtrument de Muſique en qui il ſe trouveroit quelque choſe de pareil, feroit ce qu'on appelle des ſauts, & paſſeroit d'un ton à l'autre, ou reviendroit au même, ſans aucune proportion ſenſible, ſans degrés ſucceſſifs, & contre toutes les regles connues. Auſſi la Trompette marine, qui n'eſt qu'un monocorde, où le doigt tient lieu de l'obſtacle léger, a-t-elle de ces bizarreries qui avoient été inexplicables juſqu'à

Monsieur Sauveur, & qui deviennent fort claires par le systême des ondulations. La Trompette ordinaire, le Cors de chasse, les grands instrumens à vent, sont pareillement sujets à ces irrégularités ; elles naissent de la violence de l'inspiration. Si les deux moitiés de l'instrument font séparément leurs oscillations, le son monte à l'octave. Si la force de l'inspiration étant augmentée, les tiers de l'instrument, ou plutôt de l'air qu'il contient, font séparément leurs oscillations, on aura la douzieme. Si on augmente successivement l'inspiration, & qu'on fasse osciller les $\frac{1}{4}$, les $\frac{1}{5}$ &

les $\frac{1}{6}$, &c. l'inſtrument fera des ſauts, & rendra des ſons dont il eſt facile de connoître le rapport au ſon le plus grave.

La diviſion de l'air contenu dans les tuyaux des Flûtes, ſuit cette progreſſion 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{8}$, &c.; & quoique la nature des Cors de chaſſe, des Clairons & des Trompettes, ne ſoit pas tout-à-fait la même que celle de ces inſtrumens, l'inſpiration produit en eux les mêmes diviſions. D'où il eſt aiſé de conclure qu'ils n'ont aucun ſon moyen entre la premiere octave & la ſeconde, qu'un ſeul ſon moyen entre la ſeconde octave & la troiſieme, que trois ſons

moyens entre la troisieme octave & la quatrieme, &c.

On peut proposer ici un problême. La longueur de la Flûte & son ouverture étant données, trouver la force de l'inspiration pour que l'instrument fasse des sauts, passe par exemple de la premiere octave 1 à la seconde $\frac{1}{2}$.

Voici comment je le résous. Il est à présumer que les deux parties de l'air contenu dans l'instrument ne commencent à osciller séparément, que lorsque l'inspiration a été assez forte pour donner à l'air entier la plus grande vibration qu'il peut exercer & le couper, pour ainsi dire,

en deux parties égales. Mais en conſidérant, comme nous avons fait juſqu'à préſent, & comme le calcul & l'expérience nous y autoriſoient, l'air contenu dans la Flûte, comme une corde dont le poids de l'atmoſphere étoit le poids tendant, il eſt évident que la plus grande oſcillation de l'air contenu dans la Flûte répondra au plus grand écart de la corde. Or nous avons trouvé le plus grand écart de la corde, la force pulſante étant donnée; nous trouverons donc ici par la même voie & par la même formule, la force pulſante, ou la violence de l'inſpiration, ſi le plus grand écart eſt donné.

Mais le plus grand écart est donné ; c'est le diametre de l'ouverture de la Flûte ; donc nous aurons la violence de l'inspiration ou la force pulsante $F = \frac{2a\sqrt{PG}}{\sqrt{L}}$.

La même formule aura lieu pour tous les autres sauts, en supposant la Flûte raccourcie ; ainsi veut-on avoir la violence de l'inspiration, pour que l'air contenu se divise en trois parties, & par conséquent pour que la Flûte fasse le saut $\frac{1}{3}$, on n'a qu'à employer dans la formule au lieu de L, $\frac{2L}{3}$, & ainsi des autres sauts.

On observera que tout ce que j'ai dit jusqu'à présent, concerne

les tuyaux priſmatiques & cylindriques. Il ſeroit peut-être plus difficile de déterminer leurs ſons, s'ils étoient ſuppoſés de quelque figure dont les côtés fuſſent convergens ou divergens. Mais on pourroit toujours rapporter l'air qu'ils contiendroient à une corde, le poids de l'atmoſphere au poids tendant, & réſoudre les problêmes par les formules que nous avons données.

On peut tirer de ce que nous avons dit ſur les Flûtes une maniere de fixer le ſon. Ce ſera le ſujet de ce dernier paragraphe.

X I.

Avant qu'une corde, dont la longueur eſt 2, ſoit accourcie

jusqu'à n'être plus que 1, c'est-à-dire, à l'octave en haut du son qu'elle rendoit auparavant, elle peut passer par autant de divisions que l'on voudra. Monsieur Sauveur, dans son nouveau Systême de Musique, fixe ce nombre de divisions à 43, & ces 43 parties qu'il appelle *mérides* & qui remplissent toute l'étendue de l'octave, donnent les tons les plus sensibles & les plus ordinaires qui y soient compris. Mais si l'on veut aller à des divisions de sons plus délicates, il faut encore diviser chaque méride en 7 parties qui s'appelleront *eptamérides*; & l'on aura par conséquent dans une octave 301 eptamérides.

Les vibrations de deux cordes égales doivent toujours aller enſemble, commencer, finir, recommencer dans le même inſtant. Mais celles de deux cordes inégales, doivent être tantôt ſéparées & tantôt réunies, & d'autant plus long-temps ſéparées, que les nombres qui expriment l'inégalité de ces cordes ſeront plus grands. Car que deux cordes ſoient entr'elles comme 1 à 2, & qu'elles commencent en même temps leurs vibrations, il eſt évident par tout ce que nous avons dit juſqu'à préſent, qu'après deux vibrations de la plus courte & de la plus aiguë & une vibration de l'autre, elles

recommenceront à partir ensemble, & qu'ainsi sur deux vibrations de la plus courte, il y aura toujours une réunion de vibrations de toutes les deux. Si elles étoient comme 24 à 25, il n'y auroit une réunion de leurs vibrations qu'à chaque vingt-cinquieme vibration ; & il est clair que pour de plus grands nombres les réunions sont encore plus rares.

Voilà bien des rapports, mais rien d'absolu. Pour s'entendre, il faudroit fixer un terme au-dessus duquel on prît les tons aigus ; & au-dessous, les tons graves. A cet effet, on s'est servi, & on se sert encore d'un petit

tuyau de bois ou de métal, ajuſté à l'extrémité d'un ſoufflet chargé d'un poids qui en chaſſe l'air & qui fait réſonner le tuyau. Cet inſtrument s'appelle un ton. Ce nom lui vient de ſon uſage ; car c'eſt par ſon moyen que l'on détermine le ton ſur lequel les voix & les inſtrumens doivent s'accorder dans un Concert. Et comme les Muſiciens ſouhaitent que ce ton ſoit toujours le même, ils ſuppoſent que l'inſtrument dont ils uſent pour le retrouver d'un jour à l'autre, le rend exactement. Suppoſition qui n'eſt pas vraie à la rigueur ; car 1°. un tuyau d'orgue de quatre pieds, qui par ſa nature eſt beaucoup

plus juste qu'un petit instrument de bois ou de métal, ne donne pas toujours le même son. 2°. La matiere du petit tuyau étant susceptible d'altération, le seul usage qu'on en fait, le temps, cent autres accidens doivent en changer sensiblement le son au bout de quelques années. 3°. Il est constant que l'inspiration plus ou moins forte, hausse ou baisse le son dans un tuyau. 4°. Les changemens qui se font dans le poids & la chaleur de l'atmosphere, &c.

Ce sont ces raisons & d'autres qui déterminerent M. Sauveur à chercher par une autre méthode à fixer le son. On peut voir de

quelle maniere il s'y prit, dans l'Hiſtoire de l'Acad. ann. 1700, pag. 137, & quel fut ſon ſuccès. Lorſque M. Sauveur communiqua ſes vues à l'Académie, on penſa d'abord, dit M. de Fontenelle, à s'aſſurer des expériences ſur leſquelles il fondoit la détermination du ſon fixe, & des Commiſſaires furent nommés à cet effet. Monſieur Sauveur en rendit compte lui-même, & avoua que pour cette fois elles n'avoient pas réuſſi. La difficulté de les recommencer, l'appareil qu'il faut pour cela, furent cauſe qu'on en demeura là. Soit donc qu'il y eût de l'incertitude dans la méthode de M. Sauveur, ou

beaucoup de difficulté à s'en servir, le petit tuyau prévalut, & continùa de donner le ton dans la Chapelle & dans l'Opéra.

Cependant les objections qu'on peut faire contre cet instrument sont solides, & je ne doute nullement qu'en l'employant sans précaution, il ne donne en différentes contrées, & dans un même lieu sous différentes températures de l'air, le ton ou un peu plus haut ou un peu plus bas. Mais n'y auroit-il pas moyen d'obvier aux altérations qui surviennent, soit dans la matiere de l'instrument, soit dans le poids tendant ou dans l'atmosphere ? C'est sur quoi je vais communiquer mes conjectures.

J'ai décrit plus haut la conſtruction du ton tel que nous l'employons aujourd'hui, voici comment je déſirerois qu'on le corrigeât.

Je voudrois qu'il fût compoſé de deux parties mobiles, en vertu deſquelles il pût s'alonger ou s'accourcir. Car après cela, il ne s'agiroit plus que de ſavoir quand & de combien préciſément il faudroit l'allonger ou l'accourcir, pour lui conſerver le même ſon.

Pour parvenir à cette connoiſſance, revoyons les cauſes qui produiſent de l'altération dans le ton, tel que nous l'avons. S'il n'y en a que trois, & que nous

puiſſions prévenir l'une & calculer les effets des deux autres, il ne ſera pas difficile de conſerver le même ſon au ton composé de deux parties mobiles.

L'altération de l'atmoſphere quant au poids ; ſon altération quant à la chaleur, & les changemens que ces deux cauſes occaſionnent dans la matiere de l'inſtrument, ſont les trois inconvéniens auxquels il faut remédier.

On remédiera au dernier en donnant au ton une extrême épaiſſeur relativement à ſa longueur, & en le conſtruiſant du métal ſur lequel le froid & le chaud font le moins d'impreſſion.

Cette précaution eſt d'autant plus ſûre, qu'il n'y a que le changement dans la longueur d'un tuyau qui en rende le ſon plus ou moins aigu, ainſi que l'expérience nous l'apprend & que nous l'avons trouvé par le calcul.

Pour ce qui regarde la température de l'air, le Thermometre indiquera les viciſſitudes de l'état de l'atmoſphere quant à la chaleur ; & le Barometre, ſes altérations quant à ſa peſanteur. Il ne feroit plus queſtion que de graduer le tuyau mobile, eu égard aux effets de ces deux cauſes, pour le même lieu, & eu égard aux mêmes effets & au poids du mercure, pour deux différens lieux de la Terre.

Des expériences réitérées apprendroient ce que la premiere, ou les viciſſitudes de l'état de l'atmoſphere quant à la chaleur, produiſent ſur le ſon; & le moyen de faire ces expériences, ce ſeroit d'avoir deux monocordes à l'uniſſon, & de les placer en deux endroits où la chaleur de l'air fût fort différente, & aſſez voiſins pour qu'on pût les entendre en même temps & comparer les ſons qu'ils rendroient.

Le calcul donneroit exactement les effets de l'altération de l'atmoſphere quant à ſon poids. Car connoiſſant la plus grande & la plus petite hauteur du vif-argent dans le Barometre, on trouveroit

aiſément le ton pour ces grandes & petites hauteurs & pour toutes les intermédiaires, & par conſéquent la quantité préciſe dont il faudroit alonger ou accourcir l'inſtrument d'un moment à l'autre, pour lui conſerver le même ſon.

Quand à l'aide de l'expérience & du calcul, on auroit gradué un tel inſtrument, je crois qu'on pourroit ſe promettre d'exécuter un Concert dans dix ans & à mille lieues ſur le même ton qu'on l'auroit exécuté aujourd'hui à Paris. On n'auroit pour cela qu'à ſavoir quelles étoient les hauteurs du Barometre & du Thermometre à Paris; & conſulter ailleurs ou dans un autre

temps, les mêmes machines pour en apprendre de combien il seroit à propos d'alonger ou d'accourcir le ton gradué ; à moins qu'il ne fallût le laisser au même degré, ce qu'elles diroient aussi. Si le Thermometre demandoit qu'on l'alongeât d'une partie, & le Barometre d'une autre, on l'alongeroit de deux, & ainsi pour toute autre supposition.

Il n'y a plus que l'inspiration plus ou moins forte qui pût tromper l'attente. Mais quiconque sait emboucher un instrument, ménagera son haleine de maniere à ne pas faire sauter le ton ; ce qui suffira ; car il n'importe aucunement qu'il soit plus ou moins fort. Il ne s'agit que de

ne point occaſionner de ſauts à l'inſtrument ; ce qui eſt toujours facile.

RÉSULTAT.

Pour avoir le ſon fixe, il faut donc conſtruire un inſtrument de deux parties mobiles, d'un métal ſur lequel le froid & le chaud faſſent le moins d'impreſſion.

Anéantir cette impreſſion par l'épaiſſeur conſidérable que l'on donnera au tuyau relativement à ſa longueur.

Graduer ce tuyau ſur les altérations qui ſurviennent dans le poids tendant ou dans la peſanteur de l'atmoſphere, à l'aide du calcul & du Barometre.

Corriger cette premiere gra-

duation par les expériences que nous avons indiquées sur les effets de la chaleur, dont le Thermometre indiquera la quantité.

Cette préparation suffit pour un même lieu de la Terre ; mais il faudra encore avoir égard à la pesanteur du mercure pour deux lieux différens.

OBJECTION.

Ce systême de la graduation d'un tuyau composé de deux parties mobiles, suppose, me dira-t-on, que la différence qui survient dans le poids tendant, à l'occasion des vicissitudes de l'atmosphere, influe sensiblement sur la longueur du tuyau. Car si la quantité dont il faudroit

l'alonger ou le raccourcir pour le conſerver au même ton, étoit peu conſidérable, la graduation pourroit devenir impraticable, & l'expédient propoſé pour la fixation du ſon, ſe réduire à rien.

RÉPONSE.

Ce raiſonnement eſt juſte, & je conviens que la graduation du tuyau eſt impoſſible, ſi la différence qui ſurvient dans le poids tendant ou dans la peſanteur de l'atmoſphere n'influe pas ſenſiblement ſur la longueur du tuyau. Mais l'effet de cette différence eſt conſidérable; car ſelon la température de l'air, il y a tel tuyau qui rend des ſons qui ſont entr'eux dans la raiſon des nom-

bres 840714, 960771, ou dans le rapport de 8 à 9, ainsi qu'on l'a vu ci-dessus ; ce qui prend plus d'un demi-pied sur la longueur entiere d'un tuyau de 8 pieds.

Or quel inconvénient y auroit-il à se servir d'un tuyau de cette longueur pour fixer le son ? On auroit donc alors l'espace de plus d'un demi-pied à graduer ; or cet espace est considérable pour admettre un très-grand nombre de divisions & promettre dans la fixation du son toute l'exactitude qu'on peut désirer.

Fin du premier Mémoire.

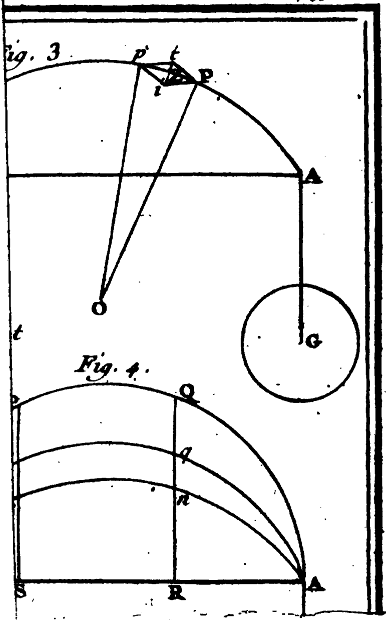


Fig. 3
p
t
P
i
A
O
G
t
Fig. 4.
Q
q
n
S
R
A

SECOND MÉMOIRE.

Examen de la développante du Cercle.

LES Géometres ont diſtingué des courbes de deux eſpeces, des courbes géométriques & des courbes mécaniques.

Ils entendent par une courbe géométrique celle dont la nature eſt exprimée par une équation qui ne contient que des quantités finies ; & par une courbe mécanique celle dont la nature ne peut s'exprimer que par une équation qui contienne des différences.

Ils ont enſuite conſidéré les courbes géométriques relativement au plus grand expoſant de l'abſciſſe ou de l'ordonnée ; ou plus généralement, relativement à la dimenſion du produit le plus grand que forment les variables, ſoit ſéparées, ſoit mêlées enſemble, dans les équations qui expriment la nature de ces courbes; & ils en ont fait différens genres ſelon ce plus haut expoſant de l'abſciſſe & de l'ordonnée, ou ſelon cette dimenſion du plus grand produit que forment les variables, ſoit ſéparées, ſoit mêlées.

Ainſi ils ont appellé courbes du ſecond genre, celles dont la

nature eſt exprimée par des équations où 2 eſt le plus haut expoſant de l'abſciſſe x, ou de l'ordonnée y, ou par des équations dans leſquelles xy produit de deux dimenſions eſt le plus haut qui s'y rencontre : de même que, ſelon eux, les courbes du troiſieme genre, ſont celles dont la nature eſt exprimée par des équations où 3 eſt le plus haut expoſant de l'abſciſſe x, ou de l'ordonnée y, ou par des équations dans leſquelles il ne ſe rencontre point de plus haut produit, que xyy ou xxy de trois dimenſions, & ainſi de ſuite.

Je n'ai garde de traiter ces diſtinctions d'arbitraires ; elles

ſont fondées dans la nature des choſes. Il y a en effet des courbes dont l'équation contient néceſſairement des différences, & d'autres dont l'équation n'en contient point; des courbes dont la nature s'exprime par une équation où le plus haut produit des variables n'eſt que de deux dimenſions, & d'autres dont la nature s'exprime par une équation où ce produit eſt de trois, quatre, cinq, &c. dimenſions.

Mais je crains bien qu'on n'ait eu trop d'égard à ces diſtinctions, & que par je ne ſais quelle délicateſſe on n'ait pas fait des courbes mécaniques autant d'uſage qu'on auroit pu, & qu'on n'ait

attaché une élégance imaginaire à n'employer dans la conſtruction des équations qu'une courbe d'un certain genre, dans des cas où une courbe d'un genre ſupérieur ſatisfaiſoit également, & ſe traçoit avec plus de facilité.

Cependant Newton & Leibnitz, dont l'autorité étoit aſſez grande en Mathématiques pour entraîner le reſte des Géometres, ont reconnu, il y a longtemps, que les courbes géométriques d'une conſtruction ſimple devoient être préférées dans la ſolution des Problêmes à des courbes d'une équation moins compliquée, mais d'une conſ-

truction plus difficile ; & c'eſt par cette ſeule raiſon que tous les Géometres abandonnent unanimement la parabole pour le cercle, ſans en excepter Deſcartes, qui, perdant ailleurs de vue la facilité de la deſcription, prononce généralement que dans les conſtructions des équations, il faut bien ſe garder d'employer une courbe d'un genre ſupérieur, quand celle d'un genre inférieur ſuffit.

Mais pourquoi n'en ſeroit-il pas des courbes mécaniques, lorſqu'elles ſont faciles à décrire, ainſi que des courbes géométriques qui ont cet avantage ? Cette queſtion eſt d'autant plus

fondée que la deſcription d'une ligne géométrique quelconque, même du cercle & de la ligne droite, eſt une opération mécanique & toujours ſujette à erreur, mais que la Géométrie ſuppoſe exacte.

Cette ſcience n'auroit-elle de l'indulgence que dans ces deux occaſions? Si l'on augmentoit le nombre de ſes inſtrumens d'un nouveau compas qui fût d'un uſage auſſi ſûr & auſſi exact que celui dont on ſe ſert pour tracer le cercle, & qui facilitât un grand nombre d'opérations, ſeroit-elle bien fondée à le rejeter?

Si deux branches de cuivre

ou d'acier ſont aſſemblées fixement en un point, & que l'extrémité de l'une tourne autour de l'extrémité de l'autre, la premiere tracera ſur un plan une courbe fort connue.

Si vous enveloppez un cercle de cuivre ou d'acier d'une chaîne fort mince; l'extrémité de cette chaîne tracera, ſoit en s'enveloppant, ſoit en ſe développant, une courbe dont perſonne, à ce que je crois, n'a encore recherché les propriétés.

Le premier de ces inſtrumens eſt un compas ordinaire, & la courbe tracée eſt un cercle: le ſecond eſt le compas que je

proposé, & la courbe tracée sera la développante du cercle.

Or conçoit-on que l'un soit plus simple que l'autre, & que la description du cercle puisse être plus facile & plus rigoureuse que celle de sa développante.

C'est la facilité qu'on a de tracer cette développante, & la multitude des cas où sa description peut avoir lieu qui m'ont déterminé à en examiner les propriétés. Je souhaite que le peu que j'en ai découvert, engage, sinon les Géometres, du moins les faiseurs d'instrumens de Mathématiques à s'en servir. C'est en leur faveur que j'ai

laissé dans ce Mémoire quelques Problêmes que j'en aurois bannis, si je n'avois écrit que pour les Savans.

PROBLÊME I.

Diviser un arc de cercle A F B (Fig. 1.) *en une raison quelconque commensurable ou incommensurable. Soit, par exemple, proposé de trouver le point* F, *tel que* AF *soit à* F B *comme* 1 *à* $\sqrt{5}$.

SOLUTION.

Tracez la dévelopante *ADE*, tirez de l'extrémité *B* de l'arc donné la tangente *BGE*; divisez cette tangente au point *G* en

deux parties qui ſoient entr'elles dans la raiſon donnée de 1 à $\sqrt{5}$. Décrivez du rayon *CG*, l'arc *GD* qui rencontre la développante en *D*. Achevez ſur *CD*, qui eſt égale à *CG*, le triangle *CDF* entiérement égal au triangle *CBG*. Je dis que le point *F* eſt le point cherché.

DÉMONSTRATION.

Le triangle *DFC* étant tout-à-fait égal au triangle *CBG*; le côté *DF* touche le cercle en *F*; donc par la nature de la développante, il eſt égal à l'arc *AF*; il eſt de plus égal au côté *BG* du triangle *CBG*. Mais la ligne entiere *BGE* eſt

égale à l'arc entier *AFB*. Donc la partie *BF* de cet arc eſt égale à *GE*.

DF = *BG* = *AF* & *BF* = *GE*. Mais *BG*. *GE* : : 1. $\sqrt{5}$. Donc *AF*. *FB* : : 1 $\sqrt{5}$. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

On a donc par le moyen de cette développante, celui d'inſcrire dans un cercle, tel polygone régulier ou irrégulier qu'on déſirera.

PROBLÊME II.

Trouver un ſecteur de cercle ACD *égal à un eſpace quelconque donné* ab, Fig. 2.

SOLUTION.

Je fais $a . CD :: x . b$. & j'ai $x = \frac{ab}{CD}$. Je tire enfuite une tangente indéterminée au cercle donné. Je prends fur cette tangente la partie $DE = \frac{ab}{CD}$. Je décris avec l'inftrument que j'ai propofé la développante AE qui paffe par le point E. Je dis que le double du fecteur ACD eft égal à l'efpace donné ab.

DÉMONSTRATION.

Le fecteur $ACD = \frac{AD \times CD}{2}$. Mais $DE = AD$. Donc le fecteur $= \frac{DE \times CD}{2}$. Subftituez à

DE ſa valeur $\frac{ab}{CD}$, & il vous viendra le ſecteur $= \frac{ab}{2}$. Donc le double du ſecteur $= ab$. Ce qu'il falloit démontrer.

PROBLÊME III.

Trouver un eſpace rectiligne égal au ſecteur extérieur quelconque AHB. Fig. 3.

SOLUTION.

Prolongez le côté *HA* en *F* où ce côté ſoit rencontré par la ligne *BCF* qui part du point *B* & qui paſſe par le centre *C* du cercle. Prolongez cette ligne *BCF* en *I*. Tirez les perpendiculaires *HI* & *AL*. Tracez

du point A la développante AE, & tirez la tangente BE. Je dis que l'eſpace $ABH = \frac{FB \times HI}{2} - \frac{FC \times FA \times HI}{2FH} - \frac{BC \times BE}{2}$.

DÉMONSTRATION.

La ſurface du triangle $FBH = \frac{FB \times HI}{2}$. Mais $FH.\ HI :: FA.\ AL = \frac{FA \times HI}{FH}$. Donc la ſurface du triangle $FAC = \frac{FC \times FA \times HI}{2FH}$. Donc l'eſpace $ACBH = \frac{FB \times HI}{2} - \frac{FC \times FA \times HI}{2FH}$. Mais l'eſpace $ACB = \frac{BC \times BE}{2}$.

Donc l'espace $ABH = \frac{FB \times HI}{2} - \frac{FC \times FA \times HI}{2FH} - \frac{BC \times BE}{2}$. Ce qu'il falloit démontrer.

PROBLÊME IV.

Trouver par le moyen de la développante AE *un espace rectiligne égal au segment* AQF. Voyez Fig. 4.

SOLUTION.

Prenez sur la tangente EF la ligne EK = au sinus AB. Je dis que le triangle CFK est égal au segment AQF.

DÉMONSTRATION.

Le triangle $CFK = \frac{CF \times FK}{2}$ $= CF \times \frac{FE - EK}{2} = \frac{CF \times \text{arc} AQF}{2}$ $= \frac{CF \times AB}{2} =$ au ſecteur $ACFQ$ $-$ le triangle $ACF =$ au ſegment AQF. Ce qu'il falloit démontrer.

PROBLÊME V.

Trouver un eſpace rectiligne égal à une portion quelconque AFB *du ſegment circulaire*, AB *étant perpendiculaire ou non à* FC. Voyez Fig. 4.

SOLUTION.

Ayant mené du point B la perpendiculaire BD ſur AC, on prendra ſur la tangente EF, la partie $EV = BD$, & ayant joint VC, on aura le triangle $CFV =$ à l'eſpace $AQFB$.

DÉMONSTRATION.

$CFV = \frac{CF \times FV}{2} = CF \times \frac{FE - EV}{2} = \frac{CF \times \text{l'arc } AQF}{2} - \frac{CF \times BD}{2} = \frac{CF \times \text{l'arc } AQF}{2} - \frac{CA \times BD}{2} =$ au ſecteur $AQFC$ — le triangle $ABC =$ l'eſpace

curviligne *AQFB*. Ce qu'il falloit démontrer.

PROBLÊME VI.

Trouver une ligne droite égale à une portion quelconque AEG *de la développante du cercle.*

Solution.

Soient (*Fig.* 5.) du point *E* la tangente *EF* & la perpendiculaire *EO* à *CE*; que cette perpendiculaire ſoit rencontrée en *O* par la ligne *CF* prolongée, & qui paſſe par le point de contengence *F*. Je dis que l'arc *AEG* eſt égal à la moitié de la ligne *FO*.

DÉMONSTRATION.

Ayant tiré la tangente ef infiniment proche de EF, & nommé CA ou CF, a ; l'arc AF, x ; l'élément Ff, dx. Les secteurs semblables CFf, Eef donneront CF, a. fF, dx :: EF, x. $Ee = \frac{xdx}{a}$, & intégrant on aura $AE = \frac{xx}{2a}$. Mais à cause des triangles rectangles semblables CFE, FEO ; on a CF, a. FE, x :: FE, x. $FO = \frac{xx}{a}$. Donc $FO = 2AE$ ou $AE = \frac{FO}{2}$. Ce qu'il falloit démontrer.

PROBLÊME VII.

Trouver un espace rectiligne égal à l'espace AFEG. Voyez Fig. 5.

Solution.

Je dis que l'espace *AFEG* est égal au tiers du triangle *EFO*.

Démonstration.

Le secteur élémentaire *Efe* $= \frac{Ee \times EF}{2} = \frac{xxdx}{2a}$, par la proposition précédente, dont l'intégrale donne l'espace *AFEG* $= \frac{x^3}{2.3a}$. Mais le triangle *EFO*

$= \frac{EF \times FO}{2} = \frac{x^3}{2a}$. Donc l'eſpace $AFEG = \frac{1}{3}$ du triangle EFO. Ce qu'il falloit démontrer.

Corollaire I.

Si l'on prend $FK = \frac{1}{3} FO$, & qu'on tire EK. Je dis que le triangle CEK ſera égal à l'eſpace mixtiligne $CAGEF$.

Car $EFK = AGEF$ & $CFE = CABF$. Donc $CABF + AGEF$ ou l'eſpace mixtiligne $CAGEF = CFE + EFK$ ou CEK.

Corollaire II.

Si on retranche des eſpaces CEK, $CAGEF$, la partie

commune *CEF*, on aura *CAGE* $=$ *EKF* $= \frac{1}{3}$ *FEO* $=$ *AGEF*.

Ce que l'on peut démontrer encore en cette ſorte. *CEF* $=$ *CABF*. Donc en ôtant la partie commune *CBF*, reſte *BEF* $=$ *CBA*, & ajoutant de part & d'autre *BAGE*, on a *CAGE* $=$ *AGEF*.

Corollaire III.

Si l'on avoit la rectification d'un arc de cercle quelconque, la développante donneroit la quadrature du cercle. Parce que faiſant de la ligne droite une tangente au cercle, à l'extrémité de l'arc auquel elle ſeroit égale, l'autre extrémité de cet

arc feroit l'origine de la développante. Or on va voir qu'un point de la courbe étant donné avec fon origine, on a la quadrature du cercle.

COROLLAIRE IV.

Si le point *E* de la développante, la rectification de la partie *AE*, la quadrature de l'efpace *CAE* étant donnés, on peut trouver l'origine *A* de la courbe, on aura la quadrature du cercle, car *FA* fera toujours égale à *FE*.

COROLLAIRE V.

Si l'on peut trouver la quadrature du fegment *AGE*; la ratification

ratification de la partie de la courbe *AGE*, le point *E* de la courbe, la quadrature de l'eſpace *CAGE*, étant donnés; ſans ſuppoſer l'origine de la courbe donnée, on aura bientôt cette origine; car ôtant de l'eſpace quarrable *CAGE*, l'eſpace *AGE*, il reſtera la ſurface du triangle *CAE*, dont les deux côtés *CA*, *CE* ſont donnés de longueur, le côté *CE* de poſition, & le lieu du ſommet *A* dans la circonférence du cercle. Mais par le Corollaire précédent, ſi l'on a l'origine de la courbe *A* & le point *E*, on a la quadrature du cercle.

PROBLÊME VIII.

L'origine de la développante AE *étant donnée, avec un de ses points* E, *trouver ses autres points.* Fig. 6.

Solution.

Tirez du point *E* la tangente *FE*. Divisez l'arc *AF* en un certain nombre de parties égales *Aa*, *aa*, *aa*, &c. Divisez la tangente *FE* en un même nombre de parties égales. Prenez l'arc *Ff* = une des parties égales de l'arc *AF*. Tirez la tangente *fe*. Prenez *fe* = *FE* + une des parties égales de *FE*. Je dis que l'extrémité *e* de la ligne

fe appartiendra à la développante.

DÉMONSTRATION.

Il eſt évident que chaque partie de la tangente *FE* eſt égale à chaque partie *Aa* de l'arc *AF*; donc ſi l'on augmente l'arc *AF* d'une partie égale aux précédentes, il faudra pareillement augmenter la tangente *FE* d'une partie égale à une de celles dans leſquelles on l'a diviſée, pour avoir une ligne *fe* qui ſoit toujours égale à l'arc *Af*, & qui étant ſuppoſée tangente en *f*, ait ſon extrémité dans la développante.

PROBLÊME IX.

Deux points E, E, (Fig. 6.) *de la développante étant donnés, trouver les autres.*

Solution.

Tirez les tangentes *EF*, *fe*; prenez l'arc *Fa* = *Ff*. Tirez la tangente *aE*. Il est évident qu'il doit y avoir la même différence de *aE* à *FE*, que *FE* à *fe*.

On peut encore diviser l'arc *Ff* en un certain nombre de parties égales, & partager la différence de *fe* à *FE* en un même nombre de parties égales. On voit, sans qu'il soit besoin de le démontrer, qu'en faisant

Fa égale à une des parties de l'arc *Ff*, & *aE* égale à *FE* moins une des parties de la différence de *fe* à *FE*; l'extrémité de *aE* appartiendra à la développante.

PROBLÊME X.

Trouver le centre de gravité d'un arc circulaire A F. Voyez Fig. 7.

SOLUTION.

Tirez la ligne *CP* qui divise l'arc *AF* par la moitié. La tangente *PO* & le sinus *AV*. Joignez *CO*, & menez *AI* parallele à *CP* & *IG* parallele à *OP*. Je dis que le point *G*

fera le centre de gravité de l'arc.

DÉMONSTRATION.

Les Géometres savent que le centre de gravité G, d'un arc APF doit être sur la ligne CP, à une distance du centre C, telle que $CP \times AV = CG \times AP$. C'est-à-dire, que CG soit à CP comme AV à l'arc AP ou à la tangente PO. Or c'est ce que donne la construction précédente. Car on a les triangles semblables CPO, CGI, & par conséquent $CG.CP :: GI.PO :: AV.PO$. Donc, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

Soit *M* le centre de gravité du secteur *CAF*. On sait que $CM = \frac{2}{3} CG$. Ainsi ayant le centre de gravité *G* de l'arc, par le moyen de la développante *AO*, on aura facilement celui du secteur.

PROBLÊME XI.

Construire une équation cubique de cette forme $x^3 = px = \pm q$; *où le cube de* $\frac{p}{3}$ *est supposé plus grand ou non moindre que le quarré de* $\frac{q}{2}$. *Cette construction demande quelques préparations par lesquelles nous allons commencer.*

LEMME I.

Dans tout quadrilatere inſcrit, le rectangle fait des diagonales, eſt égal à la ſomme des deux rectangles faits des deux côtés oppoſés. Ainſi (Fig. 8.) *je dis que dans le quadrilatere* ABCD, $AC \times BD = AB \times CD + AD \times BC$.

DÉMONSTRATION.

Tirez la ligne *AE*, de maniere que l'angle *BAE* ſoit égal à l'angle *CAD*, & que vous ayez par conſéquent l'angle $CAB = EAD$. Mais les angles *ABE* & *ACD* ſont égaux, de même que les angles

ADE & *ACB*, parce que les deux premiers, de même que les deux seconds, sont appuyés sur le même arc. Donc les triangles *ABE* & *ACD*, & les triangles *ADE* & *ACB* sont semblables.

Les deux premiers donnent $AB . BE :: AC . CD$.

Les deux seconds donnent $AD . DE :: AC . CB$.

Donc $AB \times CD = AC \times BE$, & $AD \times CB = AC \times DE$. Et $AC \times DE + AC \times BE = AB \times CD + AD \times CB$. Ou $AC \times \overline{BE + DE} = AB \times CD + AD \times CB$. Ce qu'il falloit démontrer.

LEMME II.

Si l'on inscrit dans un cercle (Fig. 9.) *un triangle équilatéral* ACB, *& que l'on tire d'un de ses angles* A *la ligne* AE, *& du point* E *les cordes* CE, EB; *je dis que la corde* AE *sera égale à la somme des deux cordes* CE, BE.

DÉMONSTRATION.

Par le Lemme précédent, $AE \times BC = EC \times AB + AC \times EB$. Mais par supposition, les côtés du triangle sont égaux; donc en les ôtant des deux membres de l'équation, on aura $AE = BE + EC$. Ce qu'il falloit démontrer.

Lemme III.

Soit ABCD, (Fig. 10.) *un arc d'un cercle donné dont le diàmetre est* AF, AB *le tiers de cet arc;* AD *la corde donnée de l'arc entier; trouver la valeur de la corde de l'arc* AB.

Prenez l'arc $BC =$ l'arc BA. Faites de l'extrémité F du diametre les arcs FE, $FG =$ l'arc AB. Tirez les cordes AB, BC, CD, AC, AD, BD, & AE, EF, FG, EG. Nommez le diametre AF, $2a$; la corde donnée AD, $2b$; la corde AB & ses égales x; la corde AC & ses égales y.

A cause du triangle rectangle AEF, on a $\overline{AE}^2 = 4aa - xx$. & AE ou $AG = \sqrt{4aa - xx}$. Mais les deux figures à quatre côtés $ABCD$ & $AEFG$, donneront par le Lemme 1. $yy = xx + 2bx$ & $2ay = \sqrt{4a^2 - x^2} \times 2x$, d'où l'on tire $yy = \frac{4aaxx - x^4}{aa}$. Donc $\frac{4aaxx - x^4}{aa} = xx + 2bx$, ou $x^3 - 3aax = -2aab$.

COROLLAIRE.

La corde AB est donc une des racines affirmatives de l'équation $x^3 - 3aax = -2aab$.

& la corde de la troisieme partie de l'arc qui est de l'autre côté de *AD*, l'autre racine positive de l'équation. Car on trouve la même chose, soit que x signifie le tiers de l'un de ces arcs ou le tiers de l'autre. Ce qui paroîtra en appliquant le même raisonnement à l'autre arc.

Il faut seulement remarquer que la quantité positive b ne peut surpasser a; car si $2b > 2a$; alors la corde *AD* sera plus grande que le diametre.

Cela posé, je passe à la solution du Problême que je me suis proposé, savoir de construire l'équation $x^3 - px = \pm q$.

SOLUTION.

Je commence par transformer la proposée en $x^3 - 3aax = \pm 2aab$, en substituant aa à $\frac{p}{3}$, & $2a^2b$ à q. J'observe après la transformation que $\frac{p^3}{27}$ étant plus grand par supposition que $\frac{qq}{4}$; a^6 sera plus grand que a^4bb, aa que bb, & a que b.

Je décris ensuite (*Fig.* 11.) un cercle du rayon a. Je tire la corde $AD = 2b$. Je trace la développante AE. Je mene la tangente DE que je partage en trois parties égales; du centre O & du rayon OG, je décris l'arc de cercle GF; je construis sur

$OF = OG$ le triangle OBF tout-à-fait égal au triangle ODG. Donc $BF =$ l'arc AB, & $AB = \frac{1}{3} AD$.

Je prends $BC = AB$; CD sera donc égale à AB; du point B & du côté BH, j'inscris le triangle équilatéral BHK, & je tire les cordes AB, HA, AK. Je dis qu'elles seront les trois racines de l'équation $x^3 - 3aax = \pm 2aab$.

DÉMONSTRATION.

Il est évident par le dernier Lemme, que si AB est la corde du tiers de l'arc AD, elle sera une des racines positives de l'é-

quation $x^3 - 3aax = - 2aab$. Et que la corde de la troisieme partie de l'arc *AKHD* sera l'autre racine positive de la même équation. Mais il n'est pas moins évident par la nature de la développante, que l'arc *AB* est le tiers de l'arc *AD*.

Et voici comment je démontre que *AK* est le tiers de l'arc *AKHD*.

L'arc *ABCD* + l'arc *AKHD* = la circonférence. Mais l'arc *AB* + l'arc *AK* sont égaux pris ensemble au tiers de la circonférence. D'ailleurs l'arc *AB* est égal au tiers de l'arc *ABCD*. Donc l'arc *AK* est égal au tiers de l'arc *AKHD*.

Donc ces deux cordes ſont les racines poſitives de l'équation propoſée, & leur ſomme la troiſieme racine, en changeant le ſigne, parce que le ſecond terme de l'équation manque. Mais, Lemme 2. $AH = AB + AK$. Donc AH eſt la troiſieme racine.

Donc AB, AK, $-AH$ ſont les trois racines de $x^3 - 3aax = -2aab$. Et AB, $-AK$, $-AH$ les trois racines de $x^3 - 3aax = +2aab$.

Donc j'ai trouvé les trois racines de l'équation $x^3 - 3aax = \pm 2aab$. Donc j'ai conſtruit l'équation propoſée $x^3 - px = \pm q$.

Remarque.

Nous avons trouvé pour l'expression de la corde du tiers d'un arc, une équation du troisieme degré. Il paroît cependant au premier coup d'œil que le Problême ne devroit avoir qu'une solution ; car il n'y a certainement qu'une seule & unique valeur possible de la corde *A C* qui sous-tend le tiers de l'arc *A B*. Mais on remarquera que l'équation algébrique à laquelle nous sommes parvenus, ne renferme point les arcs *A B*, *A C*, mais seulement leurs cordes ; & que par conséquent *x* n'est pas simplement la corde du tiers de l'arc

ACB, mais la corde du tiers de tout arc qui a AB pour corde. Or tous les arcs qui ont AB pour corde, sont en nommant c la circonférence, les arcs ACB, $ACB + c$, $ACB + 2c$, $ACB + 3c$, $ACB + 4c$, $ACB + 5c$, &c. Et $c - ACB$ ou ADB, $2c - ACB$, $3c - ACB$, $4c - ACB$, &c. Fig. 12.

Or je dis que la division de tous ces arcs en 3, fournit 3 cordes différentes, & jamais plus de 3.

Car, 1°. soit le tiers de l'arc $ACB = z$, le tiers de l'arc $ACB + c = y$, le tiers de l'arc $ACB + 2c, = u$. Cela

donnera 3 arcs différens qui auront chacun leurs cordes. Voilà donc trois cordes différentes, & par conséquent les 3 racines de l'équation.

2°. Il sembleroit d'abord que le tiers des autres arcs doit avoir aussi chacun sa corde, & que par conséquent le Problême a une infinité de solutions différentes. Mais on observera que l'arc $ACB + 3c$, a pour tiers $c + z$, dont la corde est la même que celle de z; que l'arc $ACB + AC$ a pour tiers $c + y$, dont la corde est la même que celle de y; que l'arc $ACB + 5c$ a pour tiers $c + u$, dont la

corde eſt la même que celle de u ; & ainſi de ſuite.

De même on trouvera que ADB ou $c - ACB$ a pour tiers $c - u$, parce que $3c - 3u = 3c - 2c - ABC$. Or la corde de $c - u$ eſt la même que celle de u. Par la même raiſon la corde du tiers de $2c - ACB$ ſera la même que celle de y, & celle de $3c - ACB$ la même que celle de z ; & ainſi de ſuite.

Donc la diviſion à l'infini de tous ces arcs en 3, donne 3 cordes différentes, & n'en donne pas plus de trois. Voilà pourquoi le Problême eſt du troiſieme degré.

Si on divisoit un arc en 4 parties, on trouveroit une équation du quatrieme degré, & on pourroit prouver de la même maniere qu'en effet cette division donne 4 cordes différentes, & jamais davantage; & en général, que si l'on divise l'arc *ACB* en *n* parties, la corde de la *n* partie de *nc* + *ACB* sera la même que la corde de la *n* partie de *ACB*, & que par conséquent le Problême aura *n* solutions & jamais plus. Voyez à ce sujet le Dictionnaire Universel des Sciences & des Arts, d'où j'ai tiré cet article par anticipation. Art. Trissection.

PROBLÊME XII.

Une développante quelconque AE *étant donnée, trouver par plusieurs points une autre développante* ae. Fig. 13.

SOLUTION.

Soit *CA* le rayon de la développante donnée ; *Ca* celui de la développante qu'on veut tracer. On fera *Ce. CE* : : *Ca. CA*, & le point *e* sera à la développante cherchée.

DÉMONSTRATION.

Décrivant les cercles *AF*, *af*, & tirant la tangente *EF*,

& la ligne CFf, puis joignant les points Cf, on aura par la construction $CF.Cf :: CE.Ce$. Donc FE & fe sont paralleles. Donc ef touche le cercle en f. De plus $CF.Cf :: EF.ef$. Donc $ef = \frac{Cf \times EF}{CF} = Cf \times \frac{arc \times AF}{CF} =$ arc af. Donc, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

PROBLÊME XIII.

Ayant les deux tangentes AG, GE *de la portion* AE, *dont l'extrémité* A *est l'origine de la courbe, trouver le cercle générateur.* Fig. 14.

Solution.

Solution.

En menant les perpendiculaires *AN*, *EN* ſur les deux tangentes, & prolongeant *AG* vers *M*; il eſt clair que le centre du cercle cherché ſera ſur *AM*, & que le cercle doit toucher les deux lignes *AN*, *EN* en quelque point. C'eſt pourquoi diviſant l'angle *ANO* en deux parties égales par la ligne *NC*, le point *C* ſera le centre, & *CA* le rayon.

PROBLÊME XIV.

Ayant les trois tangentes GV, VP, PF *d'une portion quelcon-*

que GEF *de la courbe, on demande le cercle générateur.* Fig. 15.

Solution.

Ayant mené les perpendiculaires *GL*, *EN*, *FM*, sur chaque tangente, la question se réduit à trouver un cercle qui touche ces trois lignes, ou en général à trouver un cercle qui touche les trois lignes données de position (*Fig. 16.*) *MVN*, *VDL*, *MLO*. Or on trouvera le centre *C* de ce cercle, en divisant en deux parties égales, les angles *V*, *L*, par les lignes *VC*, *LC*. Le centre *C* étant trouvé, la perpendiculaire *CD* sera le rayon.

THÉOREME I.

Soient décrits deux cercles concentriques à discrétion F A B, H I, (Fig. 17. 18. 19.) *soient tirées la tangente* F E *& la ligne* G I. *Soit pris l'arc* F A *à l'arc* A D; *comme* $FI^2 - GF^2 . GF^2$. *Soit regardé le point* D *comme l'origine de la développante du cercle* F A B, *il arrivera de trois choses l'une, ou que cette développante passera au-dessus du point* I, *comme dans la figure 18, ou qu'elle passera au-dessous, comme dans la figure 19, ou qu'elle passera par ce point, comme figure 17.*

Je dis que, si elle passe au-dessus du point I, *on aura la qua-*

drature de la différence des éspaces C & I; *que si elle passe au-dessous, on aura la quadrature de la somme de ces espaces, & que si elle passe par le point* I, *on aura la quadrature de l'espace* C.

DÉMONSTRATION.

Premier cas, Fig. 18, où la développante passe au-dessus du point *I*; par une proposition démontrée dans les Mémoires de l'Académie, année 1703, l'espace $A + B + C$ est quarrable. Par la nature de la développante, l'espace $A + B + I$ est quarrable. Donc l'espace $A + B + C - A, - B, - I$, ou $C - I$ est quarrable.

Second cas, Fig. 19, où la développante passe au-dessous du point *I*; par la proposition que j'ai citée, $A + B + C + I$ est quarrable. Par la nature de la développante $A + B$ est quarrable. Donc $A + B + C + I$, $- A$, $- B$ est quarrable, ou $C + I$ est quarrable.

Troisieme cas, Fig. 17. $A + B + C$ est quarrable par la proposition citée. $A + B$ l'est par la nature de la développante. Donc *C* est quarrable.

COROLLAIRE I.

C est quarrable dans le troisieme cas, Fig. 17, $B + D$ l'est aussi. Mais $C + B + D$ est égal

au secteur GHI. Donc ce secteur est quarrable.

COROLLAIRE II.

$C - I$ est quarrable dans le premier cas, Fig. 18. Mais $A + B + D + L + I$ est aussi quarrable. Donc $A + B + D + L + I + C, - I$, ou $A + B + D + C + L$ est quarrable. Mais $A + B + C$ est quarrable. Donc $D + L$ l'est aussi.

COROLLAIRE III.

$C + I$ est quarrable, second cas, Fig. 19, $A + B + D + L$ l'est aussi. Donc $A + B + D + L + C + I$ est quarrable. Donc $A + B + C + I$ l'est. Donc $D + L$ est quarrable.

COROLLAIRE IV.

Donc dans les cas où la développante, dont on suppose l'origine en *D* passe au-dessus ou au-dessous du point *I*, on a la quadrature du secteur circulaire *D* + *L*. Or dans le cas où elle passe par le point *I*, on a la quadrature du secteur *B D C*.

THÉOREME II.

Si l'on trace un cercle AFG, *avec la développante* AE, *& un autre cercle* Afg, *dont le centre* c *soit sur une ligne qui parte du centre* C, *& qui passe par le point A, avec sa développante* Ae. *Je dis que l'espace* AEe *fait des deux*

développantes & d'une partie de la ligne CEe *prolongée, est quarrable.*

DÉMONSTRATION.

L'espace *ACE* est quarrable. L'espace *Ace* est quarrable. Otant le premier du second, le reste *AEe* + *ACc* sera quarrable. Mais *ACc* est un espace rectiligne; donc l'espace *AEe* est quarrable. Ce que j'avois à démontrer.

REMARQUE.

Puisque l'on peut considérer une courbe quelconque comme composée d'une infinité de très-petits arcs circulaires, il s'ensuit

que tout ce que nous avons démontré du cercle & de sa développante, l'est aussi de ces petits arcs & de leurs développantes.

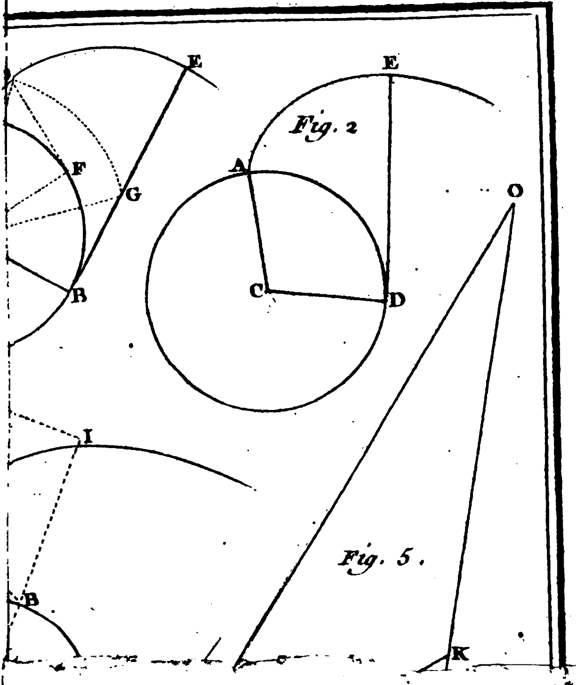
Soient donc l'arc infiniment petit *abe* d'une courbe quelconque; *ag* sa développante; *ca* son rayon osculateur; *eg* sa tangente; & *cg* une ligne tirée du centre *c* au point *g* où la développante du petit arc est rencontrée par la tangente. Planche derniere de l'ouvrage, Fig. 1.

Il est constant par une des propositions que nous avons démontrée ci-dessus, que l'espace *abeg* = l'espace *acbg*. Otant donc de part & d'autre l'espace commun *abg*, restera l'espace

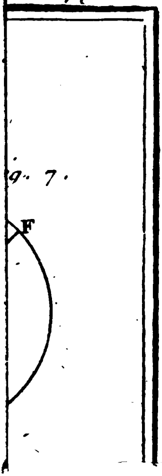
abc = l'eſpace gbe. Donc ac = $\frac{gb \times be}{ab} = \frac{gb \times ae}{ab}$; car l'angle aeg étant infiniment petit, on peut ſubſtituer ae à be. Or gb eſt le ſinus de l'angle de contingence aeg, & ab ſon ſinus verſe.

Donc le rayon de la dévelop-pée eſt toujours comme l'arc infiniment petit, multiplié par le rapport du ſinus de l'angle de contingence au ſinus verſe du même angle.

Fin du ſecond Mémoire.


E
F
G
B
I
B
E
A
C
D
O
K
Fig. 2
Fig. 5.

Pl. 3. pag. 226.



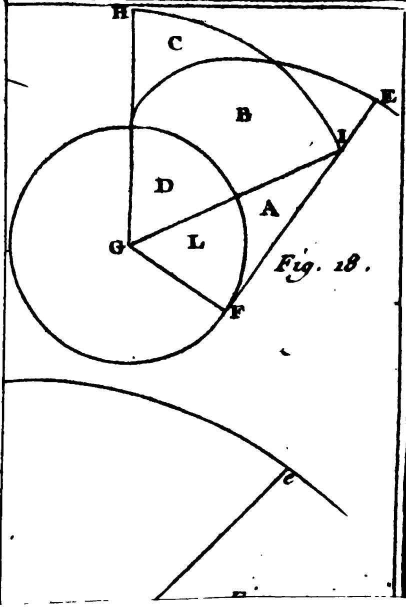


Fig. 18.

TROISIEME MÉMOIRE.

Examen d'un Principe de Mécanique sur la tension des Cordes.

SI une corde *A B* eſt attachée à un point fixe *B*, & tirée ſuivant ſa longueur par une force ou puiſſance quelconque *A*, il eſt certain que cette corde ſouffrira une tenſion plus ou moins grande, ſelon que la puiſſance *A* qui la tire ſera plus ou moins grande. Fig. 10. Planc. dern.

Il en ſera de même, ſi l'on ſubſtitue au point fixe *B* une puiſſance égale & contraire à la puiſſance *A*, il eſt conſtant que la corde ſera d'autant plus tendue, que les puiſſances qui la tirent ſeront plus grandes.

Mais voici une queſtion qui a juſqu'ici fort embarraſſé les Mécaniciens. On demande ſi une corde *AB* attachée fixement en *B* & tendue par une puiſſance quelconque *A*, eſt tendue de la même maniere qu'elle le ſeroit, ſi au lieu du point fixe *B*, on ſubſtituoit une puiſſance égale & contraire à la puiſſance *A*.

Pluſieurs Auteurs ont écrit ſur cette queſtion que Borelli a le premier propoſée. Voici comment on peut la réſoudre, en regardant la corde tendue comme un reſſort dilaté dont les extrémités *A*, *B* font également effort pour ſe rapprocher l'une de l'autre.

Je ſuppoſe d'abord que la corde ſoit fixe en *B* & tendue par une puiſſance appliquée en *A*, dont l'effort ſoit équivalent à un poids de 10 livres; il eſt certain que le point *A* ſera tiré ſuivant *AD* avec un effort de 10 livres; & comme ce point *A*, par hypotheſe, eſt en repos, il

s'ensuit que , par la résistance de la corde, il est tiré suivant *AB* avec une force de 10 livres, & qu'il fait par conséquent un effort de 10 livres pour se rapprocher du point *B*.

Mais par la nature du ressort, le point *B* fait le même effort de 10 livres suivant *BA* pour se rapprocher du point *A*, & cet effort est soutenu & anéanti par la résistance du point fixe *B*.

Qu'on ôte maintenant le point fixe *B* & qu'on y substitue une puissance égale & contraire à *A*. Je dis que la corde demeurera tendue de même ; car l'effort de 10 livres que fait le point *B*

suivant *B A*, sera soutenu par un effort contraire de la puissance *B* suivant *B C*. La corde restera donc comme elle étoit auparavant.

Donc une corde *A B* fixe en *B*, est tendue par une puissance *A* appliquée à l'autre extrémité, comme elle le seroit, si au lieu du ponit *B*, on substituoit une puissance égale & contraire à la puissance *A*.

Tel est le principe de mécanique que je me propose d'examiner. La démonstration que je viens d'en apporter est tirée du Dictionnaire Universel des Sciences & des Arts. Voyez, lorsque

cet Ouvrage paroîtra, les articles *corde*, ou *tenſion*.

Si l'on veut s'aſſurer par expérience de la vérité de ce principe ; il faut attacher une corde de laiton à un point fixe ; ſuſpendre à ſon autre extrémité un poids quelconque ; & faire gliſſer un chevalet ſous ſa longueur, juſqu'à ce qu'elle ſoit à l'uniſſon avec une des touches d'un Clavecin. Cela fait, on laiſſera le chevalet où il eſt ; & l'on ſubſtituera au point fixe un poids égal au premier.

Il arrivera de deux choſes l'une ; ou que la corde continuera d'être à l'uniſſon avec la

touche du Clavecin, ou qu'elle rendra un ſon plus aigu. Si elle rend un ſon plus aigu, la tenſion eſt plus grande avec deux poids égaux & agiſſans en ſens contraires, qu'avec un ſeul poids & un point fixe.

Le rapport des deux ſons donnera même la différence des tenſions.

Un des avantages de cette expérience, c'eſt qu'elle fournit un moyen d'apprécier les tenſions des cordes ſelon les poids qu'elles ſoutiennent ; ce que l'on auroit peut-être bien de la peine à obtenir par une autre voie.

J'envoyois dans un des Mémoires précédens au Thermometre & au Barometre pour avoir un ſon fixe, & j'envoie maintenant au Clavecin pour avoir la tenſion des cordes & la vérification d'un principe de mécanique.

Fin du troiſieme Mémoire.

QUATRIEME MÉMOIRE.

Projet d'un nouvel Orgue, sur lequel on pourra exécuter toute Piece de Musique à deux, trois, quatre, &c. parties, instrument également à l'usage de ceux qui savent assez de Musique pour composer, & de ceux qui n'en savent point du tout.

ENTRE tous les instrumens de Musique, il n'y en a peut-être aucun qui soit plus méprisé que l'Orgue d'Allemagne, & c'est

à juſte titre, car il raſſemble les défauts principaux des autres. Il a peu d'étendue, il eſt borné à un certain nombre d'airs, & l'on ne peut l'employer à l'accompagnement. Mais en revanche il ne ſuppoſe aucun talent dans celui qui en joue, & l'on ne diſconviendra pas qu'il n'y ait quelque mérite à l'avoir inventé ; que le mécaniſme n'en ſoit aſſez délicat, & que, s'il n'exécute qu'un très-petit nombre de Pieces, c'eſt avec tant de préciſion, que les premiers Organiſtes de l'Europe, les Calvier & les Daquin en approchent à peine. Auſſi les perſonnes ſenſibles à l'harmonie ne peuvent-

elles quelquefois ſe défendre de lui prêter l'oreille ; la douçeur des ſons, & l'exactitude de l'exécution ſuſpendant en elles le dédain qu'elles ont de l'inſtrument.

Mais c'eſt peut-être moins encore les imperfections de cet Orgue, l'uſage qu'on en fait & le peu de mérite qu'il y a à en joüer, qui l'ont avili, que les mains entre leſquelles il ſe trouve ordinairement. Le premier qui parut, fut admiré, il n'en faut point douter. Aujourd'hui que cet inſtrument eſt commun, les boëtes qui le renferment ne s'ouvrent guere que pour ſatisfaire la curioſité des

enfans émerveillés d'entendre ſortir des ſons d'un corps, qui par ſa reſſemblance extérieure à un morceau cubique de bois, ne leur paroît point fait pour cela.

Pour moi qui ne ſuis guere plus honteux & guere moins curieux qu'un enfant, je n'eus ni ceſſe ni repos que je n'euſſe examiné le premier Orgue d'Allemagne que j'entendis; & comme je ne ſuis point Muſicien, que j'aime beaucoup la Muſique, & que je voudrois bien la ſavoir & ne la point apprendre; à l'inſpection de cet inſtrument il me vint en penſée, qu'il ſeroit bien commode pour moi & pour

mes ſemblables qui ne ſont pas en petit nombre, qu'il y eût un pareil Orgue, ou quelqu'autre inſtrument qui n'exigeât ni plus d'aptitude naturelle, ni plus de connoiſſances acquiſes, & ſur lequel on pût exécuter toute Piece de Muſique.

En appuyant ſur cette idée, je ne la trouvai point auſſi creuſe que l'imaginerent d'abord quelques perſonnes à qui je la communiquai. Il eſt vrai qu'elles avoient leurs talens à défendre, & qu'au fond de l'ame elles auroient été fâchées qu'on découvrît un moyen de faire à peu de frais & dans un moment, ce qui leur avoit coûté beaucoup

de temps, d'étude & d'exercice.
« Eh oui, me dirent-elles, Mon-
» ſieur le pareſſeux. On vous
» en fera des Orgues d'Alle-
» magne qui joueront tout ſans
» que vous vous en mêliez. Ne
» faudroit-il pas encore vous
» diſpenſer de tourner la mani-
» velle ? » Je répondis, qu'aſſu-
rément cela n'en ſeroit que
mieux ; mais que j'aimois tant
la Muſique, que je me réſou-
drois à prendre cette peine,
pourvu qu'on m'épargnât celle
d'avoir pendant quinze ans les
doigts ſur un Clavecin, avant
que d'exécuter paſſablement une
Piece. Si le célebre Vaucanſon,
ajoutai-je, qui a fait manger &
vivre

vivre un Canard de bois, & jouer de la Flûte à des Statues, se proposoit cette autre machine, je ne doute point qu'il n'en vînt à bout, & qu'on ne nous annonçât incessamment un Organiste Automate. Et pourquoi non ? Seroit-ce le premier qu'on auroit vu ?

De réflexions en réflexions, moitié sérieuses, moitié folâtres, car je n'en fais guere d'autres, je parvins à me demander pourquoi le carillon de la Samaritaine changeoit d'airs, & pourquoi l'Orgue d'Allemagne jouoit toujours les mêmes. Je me répondis, par rapport à celui-ci, que c'est parce que les petites pointes,

que les Artiſtes appellent notes, qui agiſſent ſur les touches, ſont immobiles ſur le cylindre ; & je conçus auſſi-tôt un autre cylindre criblé de trous artiſtement diſpoſés, dans leſquels des pointes mobiles pourroient s'inſérer, frapper les touches des tuyaux qu'on voudroit faire parler, & produire enſemble & ſucceſſivement toutes ſortes de ſons à diſcrétion.

Le mécaniſme de ce cylindre, quoique de la derniere ſimplicité, ne fut d'abord que très-embarbouillé dans ma tête ; mais en attendant que mes premieres idées ſe nettoyaſſent, je fus ſi aiſe de les avoir eues que j'en

treſſaillis, & qu'il me ſembla que j'exécutois déjà tout ſeul & ſans ſavoir preſqu'un mot de Muſique, un Concert à quatre ou cinq parties. On va juger ſi je préſumai trop de ma découverte.

Mais pour bien entendre le reſte de ce projet, il faudroit tâcher de vaincre ſa honte, appeller la premiere Marmotte qu'on entendra jouer de l'Orgue d'Allemagne, ſe faire ouvrir la boëte, & achever de lire, en donnant de temps en temps un coup d'œil ſur la piece de cette machine dont on voit ici le développement.

Imaginez d'abord un cylindre

creux de quelque matiere solide, & auquel on donnera une épaisseur que l'usage qu'on en veut faire déterminera.

Que ce cylindre creux ait pour noyau un morceau de bois rond, ou un autre cylindre de bois, couvert de plusieurs doubles d'une étoffe compacte, qui forment sur lui une espece de pelote.

Que cette pelote dure remplisse exactement toute la cavité du cylindre creux.

Que ce cylindre creux soit percé de trous disposés de la maniere que je vais dire. Voyez à la fin de ce Mémoire la figure.

Les lignes verticales *sol*, 1, 2,

3, &c. *sol* ✻, 1, 2, 3, &c. *la*, 1, 2, 3, &c. ſont des projections de pluſieurs circonférences du cylindre : c'eſt ſur ces circonférences qu'on placera des notes, ou pointes mobiles ; ce qui ſuppoſe qu'elles ſeront percées de trous dans toute leur longueur.

Si ces petits trous n'étoient éloignés les uns des autres que d'une demi-ligne, on pourroit placer ſeize pointes dans un eſpace de huit lignes, & chaque pointe exprimant par ſa diſtance à celle qui la ſuit la valeur d'une double croche, on auroit pour l'intervalle d'une meſure à quatre temps, huit lignes ; pour l'inter-

valle d'une meſure à trois temps, ſix lignes, &c.

D'où il s'enſuit, 1°. que ſi le cylindre tourne ſur lui-même d'une vîteſſe uniforme, de la quantité 1, 8, & qu'il y ait une note, ou pointe fichée dans le premier trou de la ligne verticale *ſol*, une autre dans le ſecond trou de la verticale *D*, une autre dans le troiſieme trou de la verticale *la*, une autre dans le quatrieme trou de le verticale *D*, & ainſi de ſuite juſqu'au ſeizieme trou de la ſeizieme verticale, on entendra ſucceſſivement dans un temps donné les ſeize ſons, *ſol*, *ſol D*, *la*, *la D*, *ſi*, *ut*, *ut D*, &c. dans

les trois quarts de ce temps donné, les douze sons *sol*, *sol D*, *la*, *la D*, *si*, *ut*, &c. Dans la moitié du même temps, les huit sons *sol*, *sol D*, *la*, *la D*, &c. Donc tous ces sons auront été parfaitement rendus en mesure.

2°. Que si la pointe que j'ai placée dans le premier trou de la verticale *sol* avoit eu de la continuité; que si, par exemple, elle eût couvert les huit premiers trous de cette ligne, elle eût représenté une blanche, & que si j'avois placé dans le neuvieme trou de la verticale *ut* une autre pointe qui eût couvert les huit autres trous de la mesure, laissant à vide les trous des autres ver-

ticales *D*, *la*, *D*, *ſi*, *D*, *re*, *D*, &c. au lieu d'entendre, dans le temps donné, pendant lequel le cylindre a tourné ſur lui-même de la quantité 1, 8, *ſol*, *D*, *la*, *D*, *ſi*, *ut*, &c. doubles croches ; on auroit ſeulement entendu *ſol* blanche ſuivi de *ut* blanche.

3°. Qu'ayant des pointes de différentes longueurs, depuis la triple ou double croche juſqu'à la ronde & par-delà pour les tenues de pluſieurs meſures, des pointes pour la triple croche pointée, la double croche, la double croche pointée, la noire, la noire pointée, la blanche, la blanche pointée, la ronde ou la

mesure, &c. Et jouissant en même temps de la commodité de les placer sous toute verticale *sol*, *D*, *la*, *D*, *si*, *ut*, &c. & dans quelqu'endroit de ces lignes qu'on désirera; on pourra faire résonner à l'Orgue tel son & de telle durée qu'on voudra; & qu'en laissant des trous à vide sur toutes les verticales en même temps, & autant de trous qu'il sera besoin; on pratiquera tous les silences possibles, depuis le plus long jusqu'au plus court. Or ces deux points comprennent toute la mélodie.

Il faut observer seulement que si l'on veut que l'Orgue rende les triples croches, quel que soit

l'intervalle ſur une verticale, ou quelle que ſoit la partie d'une circonférence du cylindre dont la verticale eſt une projection, que l'on prenne pour une meſure, il faudra percer cette partie, cet intervalle, ou cet arc de trente-deux trous.

4°. Que tandis qu'une pointe ou note placée ſur telle verticale, & couvrant autant de trous qu'on le déſirera, fera entendre tel ſon & de telle durée qu'on voudra ; d'autres pointes ou notes placées ſur d'autres verticales pourront faire entendre la même quantité de ſons, & que chaque partie de cette quantité de ſons ſera plus ou moins

longue, plus ou moins aiguë à discrétion. Deux points qui comprennent toute l'harmonie.

Or la mesure, la mélodie & l'harmonie, constituent tout ce que nous entendons par Musique, & tout ce qui caractérise & différencie les Pieces.

Il n'y a donc point de Pieces qu'on ne pût jouer sur un instrument tel que celui que je viens de décrire.

5°. Que plus il y aura de verticales 1, 2, 3, &c. entre *sol* & *D*, entre *la* & *D*, entre *si* & *ut*, &c. plus le cylindre pourra contenir de morceaux de Musique différens à la fois.

6°. Que plus il y aura de verti-

cales *sol*, *D*, *la*, *D*, *si*, *ut*, &c. plus l'instrument aura d'étendue, & on pourra lui en donner autant & plus qu'au Clavecin.

7°. Que plus les verticales *sol*, 1, 2, 3, &c. *la*, 1, 2, 3, &c. seront longues; plus elles contiendront de mesures; plus les Pieces qu'on jouera pourront être longues. On peut donner à ces lignes ou à celles qu'elles représentent, ou au diametre du cylindre, assez de longueur pour qu'on y puisse noter toutes sortes de Pieces; je tiens de Monsieur Richard, le plus habile Constructeur d'Orgue d'Allemagne qu'il y ait à Paris, qu'on peut noter sur la circonférence

d'un cylindre de deux pieds de diametre plus de 120 mesures à quatre temps d'une *Allemanda largo* ; or ces 120 mesures équivalent à plus de 160 d'un *Allegro.*

8°. Qu'à l'aide des lignes 1, 2, 3, 4, 5, &c. horizontales qui passent sur une rangée de trous & qui en contiennent entre elles une autre, on connoîtra toujours facilement les endroits des verticales où les notes ou pointes qui agissent sur les touches, se placeront.

9°. Que si l'on donne au cylindre la facilité de se mouvoir de droite à gauche, ou de gauche à droite, on pourra faire

enſorte que les pointes placées ſur les verticales *ſol*, *D*, *la*, *D*, *ſi*, *ut*, &c. ne portent plus ſur ces touches, mais tombent dans l'intervalle que ces touches laiſſent entr'elles, & que ces touches ſoient frappées des pointes placées ſur d'autres verticales; d'où il s'enſuit qu'on aura ſur le cylindre pluſieurs Pieces à la fois, & que le nombre en ſera d'autant plus grand que l'intervalle laiſſé entre les touches permettra de laiſſer entre les verticales *ſol*, *D*, *la*, *D*, *ſi*, *ut*, &c. plus d'autres verticales 1, 2, 3, &c.

10°. Qu'en notant la même Piece ſur les verticales *ſol*, *D*,

la, *D*, *ſi*, *ut*, *D*, *re*, *D*, *mi*, *fa*, *D*; on l'eſſayeroit dans tous les tons poſſibles.

Il faut pratiquer à chaque petite pointe ou note un arrêt, afin qu'en agiſſant ſur les touches, elles ne s'enfoncent pas plus qu'il ne faut.

Il n'y a pas à craindre qu'elles ſe détachent, ſi l'étoffe dont on aura couvert le cylindre intérieur & dans laquelle elles ſont fichées par leur extrémité faite en épingle, eſt ſuffiſamment compacte, & ſi l'on obſerve quand on rechange d'airs de faire un peu tourner la pelote, afin que les trous faits dans l'étoffe par les épingles, pointes,

ou notes qu'on vient de retirer, ne correſpondent plus aux trous du cylindre de cuivre.

Elles ſe détacheront d'autant moins que l'action des touches ſur elles eſt très-foible, & que d'ailleurs elle eſt oblique à leur enfoncement.

Il faut obſerver en perçant les trous, de ne laiſſer entr'eux que l'intervalle qui convient au mouvement le plus prompt ; parce que, 1°. on placera ſur une même circonférence un plus grand nombre de meſures ; 2°. qu'il vaut mieux avoir à rallentir le mouvement de la manivelle qu'à l'augmenter. On va toujours auſſi lentement,

mais non pas aussi vîte que l'on veut.

Avantages de l'Instrument proposé.

1°. Un enfant de l'âge de cinq ans pourroit savoir noter sur le cylindre le morceau le plus difficile & l'exécuter. Cela lui coûteroit moins que d'apprendre à lire par le Bureau Typographique ; car les caracteres & leurs combinaisons sont ici beaucoup moins nombreux que les lettres. Il y a vingt-quatre lettres, & il ne me faut que onze caracteres.

2°. Tout Musicien, au lieu de composer sur le papier, pourroit

compoſer ſur le cylindre même, éprouver à chaque inſtant ſes accords, & répéter ſans aucun ſecours toute ſa Piece.

3°. Cet exercice faciliteroit extrêmement aux enfans l'étude de la Muſique, ſoit vocale, ſoit inſtrumentale; car lorſqu'ils ſe trouveroient vis-à-vis d'un Maître, ils auroient déjà fait pendant long-temps la comparaiſon des notes ſur le papier & de leur effet ſur le cylindre.

4°. Ils ſeroient plus avancés du côté de la compoſition, & ils auroient l'oreille plus faite à huit ans, qu'ils ne l'ont aujourd'hui communément à vingt,

après avoir passé par les mains des plus habiles Maîtres.

5°. On auroit certainement plus de plaisir à entendre cet instrument qu'un Organiste médiocre, comme la plupart le sont, qui ne fait que balbutier sur son Orgue, ne marche jamais en mesure, pratique à chaque instant des accords déplacés, se répete sans fin, & ne répete jamais que de mauvaises choses, &c.

6°. On ne seroit plus exposé aux boutades d'un Musicien, habile à la vérité dans son art; mais souvent plus habile que dévot, à qui il prendra envie de jouer à la consécration l'*Al-*

legro le plus badin ou la *Gigue* la plus folâtre, & d'inſpirer à tout un Peuple de Fidelles la démangeaiſon de danſer devant l'Arche, au moment où c'eſt la coutume de s'incliner.

7°. Beaucoup de perſonnes qui n'ont point de voix, qui manquent d'aptitude pour un inſtrument, qui n'ont point appris la Muſique, qui l'aiment, & qui n'ont ni les moyens, ni le temps, ni la commodité de l'apprendre, pourroient toutefois s'amuſer à jouer toutes les Pieces dont ils s'aviſeroient.

8°. Cet exercice contribueroit néceſſairement aux progrès de la Muſique.

9°. On n'emploieroit à noter & à exécuter ſur le nouvel Orgue, guere plus de temps qu'il n'en faut pour noter ſur le papier telle Piece dont l'exécution ſur le Clavecin, demanderoit des habiles, plus de temps qu'on n'en mettroit à en ranger & jouer ſur le nouvel Orgue une douzaine d'autres.

10°. La difficulté de l'exécution n'empêcheroit plus de pratiquer certains tons peu uſités avec leſquels cet Orgue familiariſeroit, comme le *ſol D*, le *la D*, &c. On pourroit compoſer dans tous ces tons ; ce qui fourniroit peut-être, ſinon des chants, du moins des traits d'har-

monie & des expreſſions qui nous ſont inconnues.

11°. D'un moment à l'autre on pourroit hauſſer ou baiſſer une Piece d'un ton, d'un demi-ton, ou de tout autre intervalle.

12°. Les expériences ſur les ſons ſe multipliant facilement de jour en jour, & cela par des gens exercés à penſer, on pourroit à la longue en amaſſer un aſſez grand nombre, pour fonder une bonne théorie & donner des regles ſûres de pratique ; ce qui n'arrivera pas, tant que les phénomenes demeureront enſevelis dans les oreilles des Artiſtes.

13°. Un bon Orgue de cette

espece rameneroit peut-être à l'Eglise de leur Paroisse, un grand nombre d'honnêtes gens qui ont de l'oreille, & qui en ont été chassés par un mauvais Organiste.

14°. Peut-être que la facilité qu'on auroit à exécuter les Pieces les plus difficiles, empêcheroit que dans la suite on ne continuât à les prendre pour les plus belles.

Je vais maintenant passer aux inconvéniens de cet instrument, car il en a.

Inconvéniens de l'Orgue proposé.

1°. C'est un ignorant en Musique qui le propose.

2°. Il ne feroit plus permis aux Organiftes d'être médiocres.

3°. On n'auroit plus befoin de ces Maîtres d'accompagnement & de compofition, qui ne nous prefcrivent que des regles vagues, dont un long ufage peut feul déterminer l'emploi.

4°. Les Maîtres à chanter garderoient la moitié moins de temps leurs écoliers.

5°. Ils feroient contraints d'être la moitié plus habiles, ayant à montrer à des écoliers dont l'oreille feroit déjà faite, qui mépriferoient la regle de tranfpofition, & qui demanderoient à chanter leur leçon comme ils la joueroient fur leur Orgue.

6°. On

6°. On joueroit en quatre heures, & cela avec la derniere précision, toutes les Pieces de M. Rameau, qu'on n'apprend en plusieurs années que très-imparfaitement.

7°. Beaucoup de gens qui sont bien aises de s'amuser avec un instrument, abandonneroient le Clavecin, la Basse-de-Viole, le Violon, &c. & négligeroient l'honneur d'apprendre mal en cinq ou six années de temps, ce qu'ils pourroient exécuter parfaitement en dix jours.

8°. Nous deviendrions extrêmement difficiles sur l'exécution de la Musique instrumentale,

d'où il arriveroit que la plupart de ceux qui s'en mêlent en seroient réduits à se perfectionner ou à brûler leurs instrumens.

9°. Comme une Piece ne me plaît pas davantage à moi qui l'entends, soit qu'on ait employé beaucoup de temps à l'apprendre, soit qu'on l'ait aussi bien apprise en un moment, l'oreille ne faisant point de distinction, nous parviendrions peut-être à nous défaire d'un préjugé favorable à plusieurs choses fort estimées qui n'ont que le mérite de la difficulté.

Je sens toute l'importance de ces inconvéniens. J'en suis frap-

pé, & je prévois que beaucoup de gens ne manqueront pas d'en imaginer une infinité d'autres de la même force, & de me traiter moi & mon Orgue d'impertinens. Mais le désir de servir en quelque chose au progrès des Beaux-Arts, autant que je le pourrai, sans nuire aux intérêts des Artistes, auxquels je n'ai garde de le préférer, suffira pour me consoler des épithetes injurieuses que j'encourrai.

Observations sur le Chronometre.

On entend par un Chronometre, un instrument propre à mesurer le temps. On prétend

qu'il feroit fort à fouhaiter qu'on eût un bon inftrument de cette efpece, afin de conferver par ce moyen le vrai mouvement d'un air ; car les mots *allegro*, *vivace*, *prefto*, *affettuofo*, *foavemente*, *piano*, &c. dont fe fervent les Muficiens, feront toujours vagues, tant qu'on ne les rapportera point à un terme fixe de vîteffe ou de lenteur dont on fera convenu. Auffi voit-on aujourd'hui des perfonnes fe plaindre que le mouvement de plufieurs airs de Lully eft perdu. Si l'on eût eu l'attention, difent-ils, de fe fervir d'un pendule pour déterminer le temps de la

mesure dans un air, & d'écrire à la tête des Pieces de Musique, au lieu de *presto*, *prestissimo*, *andante*, &c. qu'on y lit, 1, 2, ou 3 secondes par mesure, ou 5 secondes pour 1, 2, 3 ou 4 mesures, ou *m* de secondes pour *n* de mesures; on auroit évité cet inconvénient, & l'on auroit dans mille ans le plaisir d'entendre les airs admirables de Monsieur Rameau, tels que l'Auteur les faisoit exécuter de son vivant.

Ceux qui s'en tiennent à l'écorce des choses trouveront peut-être ces observations solides; mais il n'en sera pas de

même des connoiſſeurs en Muſique.

Ils objecteront contre tout Chronometre en général, qu'il n'y a peut-être pas dans un air quatre meſures qui ſoient exactement de la même durée ; deux choſes contribuant néceſſairement à ralentir les unes & à précipiter les autres, le goût & l'harmonie dans les Pieces à pluſieurs parties ; le goût & le preſſentiment de l'harmonie dans les *ſolo*. Un Muſicien qui ſait ſon art, n'a pas joué quatre meſures d'un air, qu'il en ſaiſit le caractere & qu'il s'y abandonne ; il n'y a que le plaiſir de l'har-

monie qui le ſuſpende ; il veut ici que les accords ſoient frappés, là qu'ils ſoient dérobés, c'eſt-à-dire, qu'il chante ou joue plus ou moins lentement d'une meſure à une autre, & même d'un temps & d'un quart de temps à celui qui le ſuit.

Le ſeul bon Chronometre que l'on puiſſe avoir, c'eſt un habile Muſicien qui ait du goût, qui ait bien lû la Muſique qu'il doit faire exécuter, & qui ſache en battre la meſure.

Si l'on ne joue pas aujourd'hui certains airs de Lully dans le mouvement qu'il prétendoit qu'on leur donnât, peut-être n'y

perdent-ils rien. Un Auteur n'eſt pas toujours celui qui déclame le mieux ſon ouvrage.

Mais ſi l'on ne trouve pas ces obſervations aſſez ſolides, & qu'on perſiſte à déſirer un inſtrument qui mette des bornes au caprice des Muſiciens, je commencerai par rejeter tous ceux qu'on a propoſés juſqu'à préſent, parce qu'on y a fait du Muſicien & du Chronometre deux machines diſtinctes, dont l'une ne peut jamais bien aſſujettir l'autre. Cela n'a preſque pas beſoin d'être démontré ; il n'eſt pas poſſible que le Muſicien ait pendant toute ſa Piece

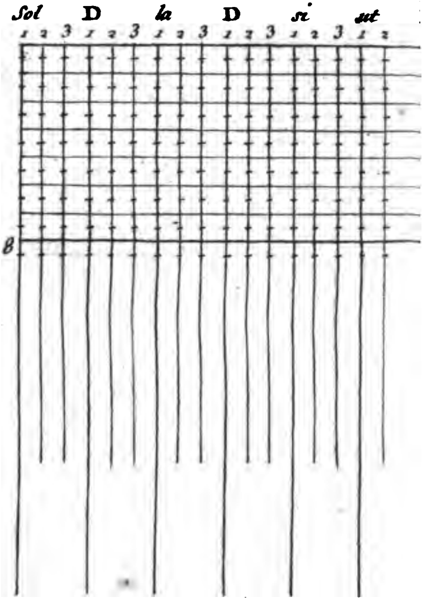
l'œil au mouvement, ou l'oreille au bruit du pendule ; & s'il s'oublie un moment, adieu le frein qu'on a prétendu lui donner.

Mais comment, me demandera-t-on, faire du Muſicien & du Chronometre une ſeule & même machine ? Il paroît que cela eſt impoſſible.

Je réponds qu'il y a tout au plus quelque difficulté. Mais voici comment j'eſtime qu'on viendroit à bout de la ſurmonter ; il faudroit d'abord que les Muſiciens renonçaſſent aux ſignes dont ils ſe ſont ſervis juſqu'à préſent, & qu'ils ſubſtituaſſent aux *piano*, *preſto*, *vivace*, *allegro*, &c.

qu'on trouve à la tête dee u Pieces, les temps employés à les jouer en entier; & qu'au lieu d'écrire *giga*, *allegro*, ils écrivissent *giga*, 12, 13, 14, &c. secondes.

On noteroit ensuite cette gigue sur le cylindre de l'Orgue que je propose, & l'on appliqueroit le pendule à secondes au cylindre, de maniere que l'aiguille parcourroit 12, 13 ou 14, &c. secondes, tandis que le cylindre tourneroit sur lui-même par le mécanisme même du pendule qui lui seroit appliqué, de l'arc sur lequel la gigue entiere seroit notée.


Sol
D
la
D
si
ut
1 2 3 1 2 3 1 2 3 1 2 3 1 2 3 1 2
B

Je n'entrerai point dans la maniere dont cette application du pendule au cylindre peut se faire ; c'est un bon Horloger qu'il faut consulter là-dessus. Voici seulement l'énoncé du Problême qu'il faut lui proposer à résoudre.

Trouver le moyen de faire tourner un cylindre sur lui même d'une quantité donnée dans un temps donné.

Fin du quatrieme Mémoire.

CINQUIEME

MÉMOIRE,

OU

LETTRE

SUR LA RÉSISTANCE DE L'AIR

Au mouvement des Pendules.

CINQUIEME

MÉMOIRE.

M***

Si l'endroit où Newton calcule la résistance que l'air fait au mouvement d'un Pendule vous embarrasse, que votre amour propre n'en soit point affligé. Il y a, vous diront les plus grands Géometres, dans la profondeur & la laconicité des *Principes Mathématiques* de quoi

consoler par-tout un homme pénétrant qui auroit quelque peine à entendre; & vous verrez bientôt que vous avez ici pour vous une autre raison qui me paroît encore meilleure; c'est que l'hypothese d'où cet Auteur est parti n'est peut-être pas exacte. Mais une chose me surprend, c'est que vous vous soyez avisé de vous adresser à moi pour vous tirer d'embarras. Il est vrai que j'ai étudié Newton dans le dessein de l'éclaircir; je vous avouerai même que ce travail avoit été poussé, sinon avec beaucoup de succès, du moins avec assez de vivacité; mais je n'y pensois plus dès le temps

que les RR. PP. le Sueur & Jacquier donnerent leur Commentaire, & je n'ai point été tenté de reprendre. Il y auroit eu dans mon ouvrage fort peu de choſes qui ne ſoient dans celui de ces ſavans Géometres, & il y en a tant dans le leur, qu'aſſurément on n'eût pas rencontrées dans le mien. Qu'exigez-vous donc de moi ? quand les ſujets mathématiques m'auroient été jadis très-familiers ; m'interroger aujourd'hui ſur Newton, c'eſt me parler d'un rêve de l'an paſſé. Cependant pour perſévérer dans l'habitude de vous ſatisfaire, je vais à tout haſard feuilleter mes paperaſſes abandonnées, conſulter les

lumieres de mes amis, vous communiquer ce que j'en pourrai tirer & vous dire avec Horace : *Si quid novisti rectius istis, candidus imperti ; si non, his utere mecum.*

PROPOSITION I.

PROBLÊME.

Soit (Fig 2.) *un Pendule* M *qui décrit dans l'air l'arc* B A, *étant attaché à la verge* G M, *fixe en* G. *On demande la vitesse de ce Pendule en un point quelconque* M, *en supposant qu'il commence à tomber du point* B.

Soient $GM = a$. $NA = b$. $AP = x$. la pesanteur $= p$. la

résistance que l'air feroit au corpuscule M, s'il étoit mû avec une vîtesse g, $= f$. La vîtesse du Pendule au point $M = v$.

SOLUTION.

Si on suppose, avec tous les Physiciens, que la résistance de l'air & des autres fluides est comme le quarré de la vîtesse, on aura la résistance au point M $= \frac{fvv}{gg}$; & cette résistance agissant suivant mM, tend à diminuer la vîtesse v. De plus la pesanteur p tirant suivant MQ, on voit facilement qu'elle se décompose en deux autres forces, dont l'une qui agit suivant MR,

est arrêtée & anéantie par la résistance du fil ou de la verge GM, & dont l'autre a son effet suivant Mm perpendiculairement à GM, & est égale à $\frac{p \times MP}{GM} = \frac{p\sqrt{2ax-xx}}{a}$. Donc la force accélératrice totale qui agit au point M pour mouvoir le corps suivant $Mm = \frac{p\sqrt{2ax-xx}}{a} - \frac{fvv}{gg}$.

Mais le temps employé à parcourir Mm, $= \frac{Mm}{v}$, & l'élément ou l'accroissement de la vîtesse est égal à la force accélératrice multipliée par le temps. Donc $\left(\frac{p\sqrt{2ax-xx}}{a} - \frac{fvv}{gg}\right)$

$\times \frac{Mm}{v} = dv$. Dans cette équation, je mets au lieu du petit arc Mm, ſa valeur $-\frac{adx}{\sqrt{2ax-xx}}$, avec le ſigne $-$, parce que v croiſſant à meſure que le Pendule deſcend, x diminue au contraire. J'ai $-pdx + \frac{fvv \times adx}{gg\sqrt{2ax-xx}} = vdv$, dont l'intégrale eſt $\frac{vv}{2} = pb - px + \int \frac{fvv \times adx}{gg\sqrt{2ax-xx}}$.

J'ai ajouté la conſtante pb, afin que v fût $= 0$, lorſque $x = b$, c'eſt-à-dire, lorſque le Pendule eſt au point B, d'où l'on ſuppoſe qu'il commence à deſcendre par ſa ſeule peſanteur.

On remarquera d'abord dans cette équation, que si $f = 0$, c'est-à-dire, si le Pendule se mouvoit dans le vide, ou dans un milieu non résistant, on auroit $vv = 2pb - 2px$; mais comme la résistance de l'air est fort petite par rapport à la pesanteur p, la valeur réelle de vv différera très-peu de $2pb - 2px$, & l'on pourra substituer $f(2pb - 2px)$ à fvv; ce qui ne produira qu'une très-petite erreur.

Ainsi on aura $vv = 2pb - 2px + 2\int \frac{f(2pb - 2px) \times adx}{gg\sqrt{2ax - xx}}$ pour la valeur approchée de vv.

Il s'agit à présent de trouver l'intégrale du terme qui est sous

le ſigne $\int$, & la difficulté eſt réduite à intégrer $\frac{badx - axdx}{\sqrt{2ax - xx}}$.

On remarquera que cette intégrale doit être priſe de telle maniere qu'elle ſoit $= 0$, quand $x = b$. Or l'intégrale du premier terme $\int \frac{badx}{\sqrt{2ax - xx}}$ eſt $b \times (\text{arc } AM - AB)$. Dans laquelle j'ai ajouté la conſtante $- b \times \text{arc } AB$, afin que $\int \frac{badx}{\sqrt{2ax - xx}}$ fût $= 0$, lorſque x ſeroit $= b$; on aura donc $\int \frac{badx}{\sqrt{2ax - xx}} = - b \times \text{arc } BM$.

Maintenant pour avoir l'intégrale de $\int \frac{-axdx}{\sqrt{2ax - xx}}$, je l'écris

ainsi $\int\frac{-axdx}{\sqrt{2ax-xx}}=\int\frac{aadx-axdx}{\sqrt{2ax-xx}}$ $-\int\frac{aadx}{\sqrt{2ax-xx}}$, dont l'intégrale est $a\sqrt{2ax-xx}-a\times AM$ $=a\times(MP-AM)$, à laquelle il faut ajouter la constante $-a(BN-AB)$; pour la raison que nous avons dite ci-dessus, on aura donc $\int\frac{-axdx}{\sqrt{2ax-xx}}$ $=-a\times(BO-BM)$.

Donc $vv=2pb-2px-\frac{2f\times 2pb\times BM}{gg}-2f\times 2pa\times(BO-BM)$.

COROLLAIRE I.

Donc lorsque le Pendule est

arrivé

arrivé en A, on a $vv = 2pb - \frac{2f \times 2pb \times BA}{gg} - \frac{2f \times 2pa \times (BN - BA)}{gg}$.

COROLLAIRE II.

Donc (*Fig. 3.*) si l'on fait $An = b - \frac{2fb \times BA}{gg} - \frac{2fa \times (BN - BA)}{gg}$, on aura $vv = 2p \times An$. C'est-à-dire, que la vîtesse au point A seroit la même que celle que le Pendule auroit acquise en tombant dans le vide du point b jusqu'en A.

COROLLAIRE III.

Si l'arc AB ne contient que peu de degrés, BN sera presque

égale à BA, & l'on pourra supposer $vv = 2pb - \frac{2f.2pb.BA}{gg}$.

PROPOSITION II.

PROBLÊME.

Supposons (Fig. 4.) *qu'un Pendule* A, *placé dans la situation verticale* G A, *reçoive une impulsion ou vîtesse* h *suivant l'horizontale* A R. *On demande sa vîtesse en un point quelconque* M.

SOLUTION.

Les mêmes noms étant supposés que ci-dessus, la force retardatrice sera ici $\frac{p\sqrt{2ax - xx}}{a}$

$+ \frac{fvv}{gg}$; parce que la résistance s'ajoute à la pesanteur pour diminuer continuellement la vîtesse du Pendule, & on aura

$$- du = \frac{adx}{v\sqrt{2ax - xx}} \times \left(\frac{p\sqrt{2ax - xx}}{a} + \frac{fvv}{gg}\right).$$

Je mets $-du$, parce que x croissant: v diminue: donc $- vdv = pdx + \frac{fvv \times adx}{gg\sqrt{2ax - xx}}$, & ajoutant les constantes, $\frac{hh - vv}{2} = px + \int \frac{fvv \times adx}{gg\sqrt{2ax - xx}}$. Donc si $f = 0$, on aura $vv = hh - 2px$; or l'on pourra, comme dans le Problême précédent, mettre au lieu de vv sa

valeur approchée $hh - 2px$, dans le terme $\int \frac{fvvadx}{gg\sqrt{\times 2ax - xx}}$. Ce qui donnera $vv = hh - 2px - 2\int \frac{fhhadx}{gg\sqrt{2ax-xx}} + 2\int \frac{f \times 2paxdx}{gg\sqrt{2ax-xx}} = hh - 2px - \frac{2fhh}{gg} \times AM + \frac{2f \times 2pa}{gg} \times (+AM - MP.)$

Soit AN la hauteur à laquelle le Pendule auroit remonté dans le vide ; on aura $hh = 2p \times AN$, & $vv = 2p \times PN - \frac{2f \times 2p \times AN \times AM}{gg} + \frac{2f \times 2pa}{gg} \times (-MP + AM.)$

Corollaire I.

Donc (*Fig. 5.*) lorsque le corps est arrivé au point c, tel que $Nn = \frac{2f \times AN \times Ac}{gg} + \frac{2f \times a \times (nc - Ac)}{gg}$; la vîtesse v sera $= 0$.

Corollaire II.

Comme nc & Ac different très-peu de NC & de AC; il s'ensuit que pour trouver le point c où le corps s'arrête, ou la hauteur n à laquelle il remonte, il faut prendre $Nn = \frac{2f \times AN \times AC}{gg} + \frac{2fa \times (NC - AC)}{gg}$.

COROLLAIRE III.

Si l'arc AC ne contient que peu de degrés, AC sera presque égale à AN, & l'on aura à peu près $Nn = \frac{2f \times AN \times AC}{gg}$.

COROLLAIRE IV.

Si un Pendule (*Fig.* 6.) descend du point B, sa vîtesse en A que je nomme h sera égale, Corol. 2. Prop. 1. à celle qu'il auroit acquise en tombant dans le vide de la hauteur $An = b - \frac{2fb \times BA}{gg} - \frac{2fa \times (BN - BA)}{gg}$, & il remontera jusqu'à la hauteur Av (Corol. 2. Prop. 2.)

$= An - \frac{2f \times An \times Ac}{gg} + \frac{2fa \times (nc - Ac)}{gg}$. Et comme nc & Ac different pèu de BN & de BA, on aura $Av = b - \frac{4fb \times BA}{gg} + \frac{4fa \times (BN - BA)}{gg}$.

COROLLAIRE V.

Donc ſi l'arc BA contient peu de degrés, on aura $Av = b - \frac{4fb \times BA}{gg} = AN \times \frac{(1 - 4f \times BA)}{gg}$. Or dans cette même ſuppoſition, les arcs AC, Ak, ſont entre eux, à très-peu près, comme les racines des abſciſſes AN, Av. Car dans le cercle, les cordes ſont entr'elles comme les racines

des abscisses ; or les arcs peuvent être pris ici pour les cordes. Donc $Ck = \frac{AC \times (\sqrt{AN} - \sqrt{A\nu})}{\sqrt{AN}}$. Or $\sqrt{An} = \sqrt{AN \frac{(1 - 4f \times BA)}{gg}}$ $= \sqrt{AN} \times \sqrt{1 - \frac{4f \times BA}{gg}}$, & comme $\frac{4f.BA}{gg}$ est fort petite par rapport à 1, on peut au lieu de $\sqrt{1 - \frac{4f \times BA}{gg}}$, mettre $1 - \frac{2f \times BA}{gg}$ qui lui est à peu près égale. Car on sait que $\sqrt{1 - \alpha}$, α étant une très-petite fraction, est $1 - \frac{\alpha}{2}$ à très-peu près. Donc $Ck = AC$

$\times \frac{2 f . BA}{gg} = \frac{2 f AB^2}{gg}$. Donc la différence *Ck* entre l'arc descendu *AB* & l'arc remonté *Ak* eſt comme le quarré de l'arc *AB*.

COROLLAIRE VI.

Donc (*Fig. 7.*) ſi on a l'arc *BAC* qu'un Pendule décrit dans l'air en tombant du point *B*, on aura facilement l'arc *bAk* qu'il doit décrire en tombant du point *b*. Car il ne faut que trouver *Ak* qu'on aura en faiſant $BA - AC . bA - Ak :: BA^2 . bA^2$.

COROLLAIRE VII.

Donc (*Fig.* 6.) si un Pendule décrit l'arc *BA* dans l'air, on aura sa vîtesse au point *A*, en divisant la ligne Nv en deux parties égales au point *n*. Car cette vîtesse, Corol. 3. Prop. 1. est à très-peu près égale à celle qu'il auroit acquise en tombant dans le vide de la hauteur $b - \frac{2f \times BA}{gg} = b - \frac{Nv}{2}$.

COROLLAIRE VIII.

On a $AC^2. Ac^2 :: AN. An$. C'est-à-dire, $AC^2. AC^2 - 2Cc \times AC :: AN. AN - Nn$.

Donc $Nn = \frac{2 Cc \times AC \times AN}{AC^2}$

$= \frac{2 Cc \times AN}{AC}$.

Par le même raiſonnement on aura $Nv = \frac{2 Ck \times AN}{AC}$. Donc $Ck . Cc :: Nv . Nn$. Donc *c* eſt le point de milieu de l'arc *Ck*. Donc au lieu de diviſer *Nv* en deux parties égales, on pourra diviſer *Ck* en deux parties égales pour avoir l'arc *Ac* que le corps *A* en remontant auroit parcouru dans le vide.

COROLLAIRE IX.

Si le Pendule *A* eſt un petit globe, la réſiſtance *f*, toutes

choses d'ailleurs égales, est en raison inverse du diametre de ce globe & de sa densité ; car la résistance de l'air à deux globes de différens diametres est comme la surface ou le quarré des diametres ; & cette résistance doit être divisée par la masse, laquelle est comme la densité multipliée par le cube du diametre. Donc l'arc Ck, toutes choses d'ailleurs égales, est comme AB^2 divisé par le produit du diametre du globe & de sa densité.

C'est à vous, M***, à voir maintenant l'usage qu'on peut faire de ces propositions, lorf-

qu'on veut avoir égard à l'altération du mouvement que cauſe la réſiſtance de l'air, dans les expériences par leſquelles on cherche avec des Pendules les lois du choc des corps. Vous appercevrez ſans peine que les Corollaires 6, 7, 8, donneront les vîteſſes que les deux Pendules ont ou reçoivent au point le plus bas où ils ſont ſuppoſés ſe choquer.

M. Newton qui, comme vous ſavez, n'a pas cru devoir négliger cette réſiſtance, lorſqu'il a parlé des lois du choc des corps, dans le premier Livre de ſes Principes, paroît avoir fait *Ck*

proportionnelle, non au quarré de l'arc parcouru, comme nous l'avons trouvé, & comme peut-être vous le supposiez, lorsque cet endroit de son ouvrage vous a arrêté; mais à l'arc seulement: c'est ce qu'il me reste à vous démontrer. Pour cet effet, je transcrirai son texte, & j'y ajouterai les éclaircissemens que je trouve dans les papiers que les RR. PP. Jacquier & le Sueur ont condamnés à l'oubli, en prévenant par leur excellent Commentaire celui que je méditois.

Texte de Newton.

« Soient, dit Newton, Princip.
» Mathématiq. pag. 50, voyez
» la figure 8 (*), les corps

(*) *Pendeant corpora sphærica* A, B, *filis parallelis & æqualibus* AC, BD, *à centris* C, D. *His centris & intervallis describantur semicirculi* EAF, GBH, *radiis* CA, DB *bisecti. Trahatur corpus* A *ad arcûs* EAF *punctum quodvis* R, *& subducto corpore* B, *demittatur indè, redeatque post unam oscillationem, ad punctum* V. *Est* RV *retardatio & resistentia aëris. Hujus* RV *fiat* ST *pars quarta sita in medio, ita scilicet ut* RS, *&* TV *æquentur, sitque* RS, *ad* ST *ut* 3 *ad* 2. *& ista* ST *exhibebit retardationem in descensu ab* S *ad* A *quàm proximè. Restituatur corpus* B *in locum suum. Cadat corpus*

» *G B H* divisées en deux par-
» ties égales par les rayons *C A*,
» *C B*. Faites remonter le corps
» *A* à quelque point *R* de l'arc
» *E A F*. Otez le corps *B*, &
» laissez retomber le corps *A*;
» s'il remonte après une oscilla-
» tion au point *V*, *R V* expri-

& colligendi effectus reflexionis. Hoc modo in pendulis pedum decem rem tentando, idque in corporibus tam inæqualibus quàm æqualibus, & faciendo ut corpora de intervallis amplissimis, puta pedum octo, vel duodecim, vel sexdecim, concurrerent; reperi semper, sine errore trium digitorum in mensuris, ubi corpora sibi mutuò occurrebant, æquales esse mutationes motuum corporibus in partes contrarias illatæ, atque ideo actionem & reactionem semper esse æquales, &c.

» mera la retardation causée par
» la résistance de l'air. Prenez
» *ST* égale à la quatrieme par-
» tie de *RV*; placez-la dans le
» milieu; de sorte que *RS* soit
» égale à *TV*, & que *RS* soit
» à *ST* comme 3 à 2, *RS*
» exprimera à peu près la retar-
» dation après la descente de *S*
» en *A*. Remettez à sa place le
» corps que vous aurez ôté.
» Laissez tomber le corps *A* du
» point *S*. Sa vîtesse au point
» de réflexion *A* sera sans erreur
» sensible la même que s'il étoit
» descendu dans le vide du point
» *T*. Soit donc cette vîtesse ex-
» primée par la corde *TA*; car
» tous les Géometres savent que

» la vîtesse d'un Pendule au point
» le plus bas de l'arc qu'il décrit,
» est comme la corde de cet
» arc. Si le corps *A* remonte
» après le choc au point *S*, &
» le corps *B* au point *K*, ôtez
» le corps *B* & trouvez le point
» *u*, d'où laissant tomber le corps
» *A*, il remonte après une os-
» cillation au point *r*, tel que *s t*
» soit la quatrieme partie de *r u*,
» & *s r* égale à *t u*. La corde
» *t A* exprimera la vîtesse que le
» corps *A* avoit en *A*, après sa
» réflexion; car *t* est le lieu vrai
» & corrigé, auquel le corps *A*
» seroit remonté sans la résis-
» tance de l'air. Il faudra corri-
» ger de la même façon le lieu *K*,

» auquel le corps *B* eſt remonté,
» & trouver le point *l* qu'il eût
» atteint dans le vide. C'eſt ainſi
» qu'on fera les expériences,
» comme dans le vide. Enfin il
» faudra, pour ainſi dire, mul-
» tiplier le corps *A* par la corde
» *TA*, qui exprime ſa vîteſſe,
» pour avoir ſon mouvement au
» point *A*, immédiatement avant
» le choc, & par la corde *tA*,
» pour avoir ſon mouvement,
» après le choc. Il faut chercher
» par la même méthode les quan-
» tités de mouvement qu'ont
» avant & après le choc, deux
» corps qu'on a laiſſé tomber en
» même temps de deux points
» différens, & trouver par la

» comparaison de ces mouve-
» mens les effets du choc. C'est
» ainsi qu'en faisant mes expé-
» riences sur des Pendules de dix
» pieds de long, tant avec des
» corps égaux qu'avec des corps
» inégaux, que je laissois tom-
» ber de fort loin, de la dis-
» tance, par exemple, de 8, 12,
» 16 pieds, j'ai trouvé, sans
» avoir erré dans mes mesures
» de la quantité de trois doigts,
» que les changemens que le
» choc direct fait en sens con-
» traires, aux mouvemens des
» corps, étoient égaux; & par
» conséquent que l'action étoit
» toujours égale à la réac-
» tion, &c. »

ÉCLAIRCISSEMENS.

Voilà le texte de Newton, & voici maintenant les éclairciſſemens que je me ſuis engagé de vous donner. Si un corps tombe de *R* en *A*, Fig. 9, dans un milieu non réſiſtant, ſa vîteſſe eſt, comme on ſait, égale à celle qu'il auroit acquiſe en tombant d'une hauteur égale à celle de *RA*. Mais comme le milieu réſiſte ici, on peut ſuppoſer la vîteſſe du corps en *A*, égale à celle qu'il auroit acquiſe en tombant dans un milieu non réſiſtant par un arc $xA < RA$.

Arrivé en *A*, ſi le milieu ne réſiſtoit point dans la branche

AM, le corps remonteroit par un arc $A\rho = Ar$; mais la résistance du milieu fait qu'il ne remonte que jusqu'en *N*; de *N* il descend en *A*, où l'on suppose qu'il ait une vîtesse égale à celle qu'il eût acquise en tombant par un arc $nA < NA$ dans un milieu non résistant; & au lieu de remonter par l'arc $Ay = An$, la résistance du milieu ne lui permet de remonter qu'en *V*.

Cela posé, l'arc *RV* exprime les retardations produites par la résistance du milieu dans toutes les oscillations dont je viens de parler. Mais ces oscillations étant toutes plus petites les unes que

que les autres, pour avoir la retardation de chacune d'elles en particulier, il faudroit partager inégalement l'arc *RV*; & comme ces oscillations sont au nombre de quatre, la retardation pour la premiere oscillation est plus grande que la quatrieme partie de *RV*; & cette quatrieme partie, trop grande pour la retardation de la quatrieme oscillation. Mais il est un point *S* d'où le corps tombant jusqu'en *A*, la quatrieme partie de *RV* exprimera exactement la retardation pour l'arc *SA*.

Cherchons ce point *S*. Pour le trouver soit $RA = 1$; $RV = 4b$; $SA = x$. en supposant

les retardations proportionnelles aux arcs parcourus, on aura Rr retardation de l'arc parcouru $RA = \frac{b}{x}$; & $A\rho$ second arc $=$ $Ar = RA - Rr = 1 - \frac{b}{x}$; de même ρN retardation de l'arc $A\rho = (1 - \frac{b}{x}) \times \frac{b}{x} =$ $\frac{b}{x} - \frac{bb}{xx}$. Donc AN 3[e] arc $=$ $A\rho - \rho N = 1 - \frac{2b}{x} + \frac{bb}{xx}$; & la retardation Nn de l'arc $AN = (1 - \frac{2b}{x} + \frac{bb}{xx}) \times \frac{b}{x}$ $= \frac{b}{x} - \frac{2bb}{xx} + \frac{b^3}{x^3}$. Donc Ay $= An = AN - Nn$ quatrième arc $= 1 - \frac{3b}{x} + \frac{3bb}{xx} - \frac{b^3}{x^3}$,

Donc Vy retardation du quatrieme arc $= \frac{b}{x} - \frac{3bb}{xx} + \frac{3b^3}{x^3} - \frac{b^4}{x^4}$.

On a donc Rr, retardation du premier arc $= \frac{b}{x}$.

ρN, retardation du ſecond $= \frac{b}{x} - \frac{bb}{xx}$.

Nn retardement du troiſieme $= \frac{b}{x} - \frac{2bb}{xx} + \frac{b^3}{x^3}$.

Vy, retardation du quatrieme $= \frac{b}{x} - \frac{3bb}{xx} + \frac{3b^3}{x^3} - \frac{b^4}{x^4}$.

Et à cauſe que $Rr + \rho N + Nn + Vy = VR = 4b$, on a $\frac{4b}{x} - \frac{6bb}{xx} + \frac{4b^3}{x^3} - \frac{b^4}{x^4}$

$= 4b$, ou $x^4 - x^3 + \frac{3bxx}{2} - bbxx + \frac{b^3}{4} = 0$, équation dont la solution approchée donnera la valeur de x.

Pour cet effet, je retranche les deux derniers termes $- bbxx + \frac{b^3}{4}$ qui sont insensibles par rapport aux autres, parce que b est fort petite; & il reste $x^4 - x^3 + \frac{3bxx}{2} = 0$, ou $x^2 - x + \frac{3b}{2} = 0$, équation dont la racine est $x = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{3b}{2}}$. Mais $\sqrt{\frac{1}{4} - \frac{3b}{2}}$ est à peu près

$\frac{1}{2} - \frac{3b}{2}$; donc x eſt à peu près $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{3b}{2} = 1 - \frac{3b}{2}$.

Remarques ſur cette approximation.

Remarquez, 1°. que $-bbxx + \frac{b^3}{4} < 0$; parce que $x > b$; d'où il s'enſuit que $x^4 - x^3 + \frac{3bxx}{2} > 0$. Donc $x > \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{3b}{2}}$. Mais $\frac{1}{2} - \frac{3b}{2}$ eſt un peu plus grand que $\sqrt{\frac{1}{4} - \frac{3b}{2}}$; donc en mettant $\frac{1}{2} - \frac{3b}{2}$ pour $\sqrt{\frac{1}{4} - \frac{3b}{2}}$, on rend à x à peu

près autant qu'on lui avoit ôté ; d'où il suit que cette approximation est aussi simple & aussi exacte qu'on le puisse désirer, dans la supposition que les retardations sont comme les arcs & non comme les quarrés des arcs.

2°. Que les retardations $\frac{b}{x}$, $\frac{b}{x} - \frac{bb}{xx}$, &c. sont en progression géométrique.

3°. Que pour résoudre exactement l'équation $\frac{4b}{x} - \frac{6bb}{xx} + \frac{4b^3}{x^3} - \frac{b^4}{x^4} = 4b$, on eût fait $1 - \frac{4b}{x} + \frac{6bb}{xx} - \frac{4b^3}{x^3} + \frac{b^4}{x^4} =$

$1 - 4b$. Donc $1 - \frac{b}{x} = \sqrt[4]{1-4b}$ ou $x = \frac{b}{1-\sqrt[4]{1-4b}}$.

4°. Que pour trouver le lieu V, on a $st. tu :: 2. 3$, & que $tu = sr$. D'où il s'ensuit que $su. sr :: 5. 3$. Soit donc $As = 1$, $sr = x$, on a $Au = 1 + \frac{5x}{4}$, $Ar = 1 - x$. Or Au est à Ar à peu près comme $AV. AR$. Donc si l'on fait $AV. AR :: m. n$, on aura $m. n :: 1 + \frac{5x}{3}$, $1 - x$. Donc $n + \frac{5xn}{3} = m - mx$. Donc $x = \frac{m-n}{m+\frac{5n}{3}} =$

$\frac{3 \times \overline{m-n}}{3m+5n} \times As$, parce qu'on a supposé $As = 1$.

On peut encore chercher ce point V par expérience, en laissant tomber le Pendule d'un point V jusqu'à ce qu'il revienne en un point r, dont la distance sr au point s soit $= s.u \times \frac{3}{5}$, ou enfin on peut prendre simplement $st = \frac{As}{AS} \times ST$.

Voilà, ce me semble, tout l'endroit de Newton sur les retardations du Pendule causées par la résistance de l'air, assez bien défriché. D'où il paroît s'ensuivre que cet Auteur suppose les retardations comme les arcs,

au lieu que nous les trouvons par les propoſitions précédentes, comme les quarrés des arcs.

Vous m'objecterez ſans doute que Newton a l'expérience pour lui ; & que c'eſt d'après cette hypotheſe (*) qu'il a trouvé que l'action eſt toujours égale à la réaction ; & que ſi, par exemple le corps *A*, après avoir choqué le corps *B* en repos avec 9

(*) *Ut ſi corpus* A *incidebat in corpus* B *quieſcens cum novem partibus motûs, & amiſſis ſeptem partibus pergebat poſt reflexionem cum duabus ;* *corpus* B *reſiliebat cum partibus iſtis ſeptem. Si corpora obviam ibant,* A *cum duodecim partibus &* B *cum ſex, & redibat* A *cum duabus ; redibat* B *cum octo, factâ, &c.*

degrés de mouvement, continuoit d'aller avec deux, le corps *B* partoit avec sept degrés; que si les corps se choquoient en sens contraires, *A* avec 12 degrés de mouvement, & *B* avec 6, & que *A* se réfléchit avec 2, *B* se réfléchissoit avec 8, &c.

Je vous répondrai que, quoiqu'on ne se soit jamais avisé de douter ni de l'exactitude, ni de la bonne foi de Newton, cela n'a pas empêché qu'on n'ait réitéré ses Expériences sur les couleurs. Pourquoi n'en feroit-on pas autant dans cette occasion-ci, où cet Auteur est parti d'une hypothese que le calcul contredit évidemment, & où il étoit

d'autant plus facile de ſe tromper, que les vîteſſes ſont repréſentées par des quantités dont les différences ſont très-petites, ſavoir les cordes des arcs parcourus devant & après les retardations.

Si vous trouvez que ce ne ſoit pas aſſez accorder au grand nom de Newton, j'en ſuis fâché ; pour moi, je ne puis lui accorder davantage : j'ai pour Newton toute la déférence qu'on doit aux hommes uniques dans leur genre ; j'incline fort à croire qu'il a la vérité de ſon côté ; mais encore eſt-il bon de s'en aſſurer. J'invite donc tous les amateurs de la bonne Phyſique

à recommencer ses Expériences, & à nous apprendre si les retardations sont telles que Newton paroît les avoir supposées, proportionnelles aux arcs parcourus, ou telles que le calcul nous les donne, proportionnelles aux quarrés de ces arcs.

CONCLUSION

Des cinq Mémoires.

Premiere Expérience. Graduer un tuyau composé de deux parties mobiles, & tenter par ce moyen la fixation du son.

Seconde Expérience. Construire un compas du cercle & de sa développante, & essayer

ſi par ce moyen on n'obtiendra pas la diviſion des arcs de cercles en parties commenſurables ou incommenſurables & d'autres opérations, & plus facilement & plus exactement que par toute autre voie.

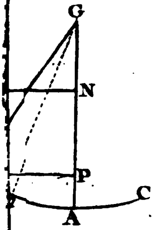
Troiſieme Expérience. Déterminer par le ſon, ſi une corde attachée par une de ſes extrémités à un point fixe, & tirée de l'autre par un poids, eſt auſſi tendue que ſi elle étoit tirée à ſes deux extrémités par deux poids égaux.

Quatrieme Expérience. Conſtruire un Harmonometre, ou un Orgue ſur lequel on puiſſe jouer, ou même compoſer toutes

Pieces de Musique, & éprouver à chaque instant son harmonie.

Cinquieme Expérience. S'assurer si les retardations que l'air fait au mouvement des Pendules, sont comme les arcs ou comme les quarrés des arcs, & recommencer les Expériences de Newton sur le choc des corps.

FIN.



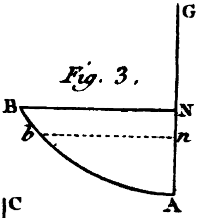


Fig. 3.

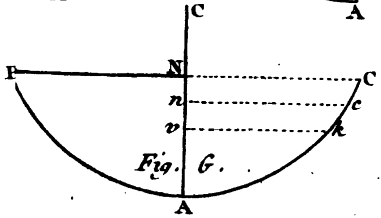


Fig. 6.

Fig. 8.

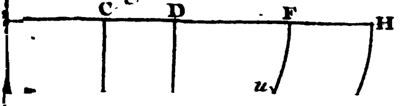


TABLE DES MATIERES.

PREMIER MÉMOIRE.

PRINCIPES généraux d'Acouſtique, pag. 1
La Muſique n'eſt point une Science arbitraire ; §. 1, 2
Fondement de la Théorie de la ſcience des Sons. Sentimens oppoſés de Pythagore & d'Ariſtoxene ; §. 2, 5
De l'objet & de la fin de la Muſique. Du Son en général. Qu'eſt-ce que le Son? De ſon véhicule. Du corps ſonore. Comment agit-il ſur nos oreilles. De l'organe par lequel nous recevons la ſenſation du Son. De la propagation du Son. De ſa vîteſſe ; §. 3, 12
Des eſpeces de Son. Diſtribution du Son. De ſa premiere eſpece, ou du Son rendu par les cordes. De leurs vibrations. Faits d'expérience ſur leſquels les propoſitions de Taylor ſont fondées ; §. 4, 18
Lemme I. Si les Ordonnées de deux

courbes dont l'abſciſſe eſt commune ont entr'elles une raiſon donnée ; les courbures au ſommet des ordonnées feront entr'elles comme les ordonnées, lorſque les ordonnées ſeront infiniment petites, & les courbes ſur le point de coincider avec leur axe, 21
Lemme II. La force accélératrice d'un point quelconque d'un fil élaſtique tendu & d'une groſſeur uniforme, eſt dans ſes petites vibrations comme la courbure du fil en ce point, 24
La corde vibrante peut prendre une infinité d'autres figures que celles que Taylor lui aſſigne, 28
Propoſition premiere. Si la nature d'une courbe *APQL*, *fig.* 4, eſt telle qu'ayant tiré deux ordonnées quelconques *QR*, *PS*, la courbure en *R* ſoit à la courbure en *P*, comme *QP*, *PS* ; tous les points de cette courbe arriveront en même-temps à la ligne droite, 30
Propoſition II. Tracer la courbe muſicale dont les axes ſont données, 32
Propoſition III. Le temps d'une vibration de la corde eſt au temps d'une oſcillation d'un Pendule de longueur déterminée, en raiſon ſous-doublée du poids de la corde multiplié par ſa longueur ; au poids qui la tend mul-

tiplié & par la longueur du Pendule & par le quarré du rapport de la circonférence au diametre, d'où l'on tire le nombre des vibrations de la corde, pendant une oscillation du Pendule, 37
Remarque I. Ce que l'on entend par la longueur & le poids de la corde, 45
Remarque II. Sur les formules de Taylor & leur généralité, *ibid.*
Les vibrations d'une corde sont d'un peu plus de durée, si on la frappe dans son milieu, qu'en tout autre point, 49
De l'Isochronisme des vibrations & du coup d'archet, 50
Corollaires des Propositions précédentes, 51
De l'oreille. Du son considéré relativement à ses degrés du grave à l'aigu; ce qui constitue ces degrés. Des intervalles des Sons; de leurs limites; de leur expression en nombres. Ils sont commensurables & incommensurables. De l'Addition, Soustraction, Division, Multiplication; de ces intervalles; de l'impression approchée du rapport de deux Sons incommensurables, §. 5, 52
Remarque qui contient une méthode d'approcher de la valeur réelle d'un rapport, si près que l'on voudra, 62

Remarque sur l'impression logarithmique des intervalles des Sons, 64
Du Son considéré comme fort ou foible. De la force du Son par rapport à la distance au corps sonore. Des fibres sonores & de leur réunion en un point. Des chambres acoustiques. Les vibrations sont plus ou moins grandes, sans que le son change de degré du grave à l'aigu. Trois choses à considérer dans le Son, leur nombre, leur étendue & leur isochronisme. De l'uniformité du Son ; ce que c'est. Suite du défaut d'uniformité. Preuve expérimentale que le plaisir musical consiste dans la perception des rapports des Sons ; §. 6, 67
Remarque importante sur l'origine du plaisir en général. Principe général sur le goût. Application de ce principe à des Phénomenes délicats, 72
Objection contre le fondement que nous donnons au plaisir musical, 79
Réponse à cette Objection, 81
Regle qu'on peut observer sur la tension des cordes, 82
De la force du Son. En quoi elle consiste. Sentimens de Monsieur Euler, §. 7, 83
Problême. Trouver la plus grande vîtesse d'une corde vibrante, ou celle

qu'elle a en achevant sa premiere demi-vibration, 88
Vérification de l'expression de la vîtesse trouvée dans la solution qui précede, 90
Regle qui peut être d'usage dans les constructions des Instrumens, selon M. Euler, 93
Regle qu'il faudroit observer selon nous, 96
Problême. La force pulsante étant donnée, trouver le plus grand écart d'une corde, 98
De la seconde espece de Son, ou des cloches, des verges de métaux, & des bâtons durcis au feu. Le Son d'une cloche presqu'impossible à déterminer; rapport du Son de deux cloches de même matiere & de figure semblable. Rapport des Sons de deux verges de métaux; §. 8, 101
Remarque sur une quantité négligée dans l'expression du Son des verges sonores & employée dans l'expression du Son des cloches, 105
Du Son produit par la dilatation & la percussion subite de l'air. Du bruit, 106
De la troisieme espece de Son, ou des Instrumens à vent. De la Flûte. Systême de M. Euler sur les Instrumens à vent, & particuliérement sur les Flûtes.

Description de la Flûte. Trouver le Son rendu par une Flûte donnée de longueur & de capacité. De la variation qui survient dans le Son des Flûtes, quant au degré du grave à l'aigu. Explication de cette variation. De la force du Son des Flûtes. De l'uniformité du Son des Flûtes. De l'inspiration. Des sauts qu'elle occasionne. Du rapport de ces sauts ; §. 9, 108
Systême des Sauts, tiré de l'Histoire de l'Académie. Expérience singuliere sur les Sons rendus par les deux parties d'une corde divisée inégalement par un obstacle léger. Table des Sons rendus selon différentes divisions de la corde par l'obstacle léger ; §. 10, 125
Expérience à faire. Questions aux Physiciens. Conjectures sur ce que l'expérience donnera. De la Trompette marine & autres instrumens semblables. Du Cors de chasse ; de la Trompette & autres Instrumens à vent. Des sauts de ces Instrumens & des intervalles qu'ils laissent entr'eux, 142
Problême. La longueur d'une Flûte & son ouverture étant données, trouver la force de l'inspiration pour que l'Instrument fasse des sauts, 148
De la fixation du Son ; des Expériences de M. Sauveur ; de l'Instrument qu'on

appelle *Ton.* Inconvénient de cet Instrument. Des causes qui en alterent le Son. De sa correction & de la maniere de fixer le Son selon nous ; §. 11, 151
Objection contre la méthode proposée & réponse, 166

SECOND MÉMOIRE.

Examen de la développante du cercle, 169
Problême I. Diviser un arc de cercle en une raison quelconque commensurable ou incommensurable, 178
Problême II. Trouver un secteur circulaire égal à un espace rectiligne donné, 180
Problême III. Trouver un espace rectiligne égal à un secteur circulaire extérieur quelconque, 182
Problême IV. Trouver un espace rectiligne égal à un segment circulaire quelconque, 184
Problême V. Trouver un espace rectiligne égal à une portion quelconque d'un segment circulaire, 185
Problême VI. Trouver une ligne droite égale à une portion quelconque de la développante du cercle, sans que l'origine de cette développante soit donnée, 187

Probléme VII. Quadrature de certains eſpaces terminés par des lignes droites & par une portion de la développante du cercle avec pluſieurs corollaires de cette propoſition, 189

Probléme VIII. L'origine de la développante avec un de ſes points étant donnée, trouver ſes autres points, 194

Probléme IX. Deux points de la développante étant donnés, trouver les autres, 196

Probléme X. Trouver par le moyen de la développante le centre de la gravité d'un arc & d'un ſecteur circulaire, 197

Probléme XI. Conſtruire une équation cubique d'une forme donnée avec certaines conditions, 199

Lemme I. Dans tout quadrilatere inſcrit, le rectangle fait des diagonales eſt égal à la ſomme de deux rectangles faits des deux côtés oppoſés, 200

Lemme II. Si l'on inſcrit un triangle équilatéral, & que l'on tire du ſommet d'un de ſes angles une ligne qui traverſe la baſe & qui rencontre le cercle en un point, on aura une corde égale à la ſomme des deux cordes tirées du point où la premiere rencontre le cercle, aux deux extrémités de la baſe du triangle équilatéral, 201

Lemme III. Un arc de cercle étant donné, avec la corde entiere de cet arc, trouver la valeur de la corde du tiers, 203
Remarque importante sur l'équation du troisieme degré qui exprime la valeur de la corde du triers d'un arc & sur le nombre de ses racines, 210
Problême XII. Une développante d'un cercle étant donnée, tracer par plusieurs points une autre développante, 215
Problême XIII. Deux tangentes d'une portion de la développante du cercle étant données, avec l'origine de cette courbe, trouver le cercle générateur, 216
Problême XIV. Trois tangentes d'une portion quelconque de la développante du cercle étant données, trouver le cercle générateur, 217
Théoreme I. Quadrature de quelques espaces terminés par des portions de la développante, 219
Théoreme II. Quadrature de l'espace compris entre deux dévelopantes, 223
Application des propositions précédentes sur la développante du cercle aux arcs infiniment petits des courbes en général, avec une expression générale des raports des rayons osculateurs, 224

TROISIEME MÉMOIRE.

Examen d'un Principe de Mécanique sur la tension des cordes, 227

QUATRIEME MÉMOIRE.

Projet d'un nouvel Orgue, 235
Avantages du nouvel Orgue, 257
Inconvéniens du nouvel Orgue, 263
Observations sur le Chronometre, 267

CINQUIEME MÉMOIRE.

Lettre sur la résistance de l'air aux mouvemens des Pendules, 279
Problême I. Trouver la vîtesse d'un Pendule d'une longueur donnée, qui tombe d'une hauteur donnée, en un point quelconque de l'arc qu'il parcourt, 282
Problême II. Trouver la vîtesse d'un Pendule d'une longueur donnée en un point quelconque de l'arc qu'il parcourt en remontant de la situation verticale en vertu d'une impulsion donnée, 290
Examen de la Théorie de Newton sur la résistance que l'air apporte au mouvement des Pendules, 303
Conclusion de l'Ouvrage, 324

Fin de la Table des Matieres.